This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06644384 1

Lehrbuch

der

Körperberechnungen, der Geoſtatik, Hydroſtatik, Geomechanik und Hydraulik,

ohne

Anwendung der höhern Analyſis.

Zum Leitfaden

für beſondere, jährlich zu haltende Vorträge bearbeitet und in möglichſter Kürze zuſammen gedrängt

von

D. C. L. Lehmus,
Doctor der Philoſophie.

Mit 4 Figurentafeln.

Berlin, 1822.
Gedruckt und verlegt
bei G. Reimer.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
552422B
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Vorrede.

Außer meinen übrigen mathematiſchen Vorträgen, bin ich auch jährlich veranlaßt, künftigen Landbaumeiſtern und Bergleuten, denen Zeit oder Verhältniſſe es nicht geſtatten, höhere Analyſis, und angewandte Mathematik in größerem Umfang, zu ſtudieren, die allernothwendigſten Lehren der Körperberechnungen, der ſtatiſchen und mechaniſchen Wiſſenſchaften in der möglichſten Gedrängtheit, blos in Beziehung auf practiſchen Gebrauch, und ohne alle Anwendungen der höheren Analyſis, in kurzer Zeit, vorzutragen. Für dieſe Vorträge eignet ſich mein Lehrbuch der Geometrie (2 Bände,

Berlin bei Reimer) und das der angewandten Mathematik (3 Bände, Berlin bei Reimer) nicht, und da sowohl das Dictiren des Lehrers, als das Ausarbeiten des Lernenden, nach einem freien Vortrag, seine Nachtheile hat, so habe ich diese Bogen dem Druck übergeben, lege aber auf diese Arbeit keinen Werth, indem ich das unvermeidlich mangelhafte derselben sehr wohl erkenne.

Der Verfasser.

Inhalt.

Körperberechnungen. . .	§. 1. bis §. 27.	Seite 1
Erſtes Capitel. Vom Prismen.	§. 1. bis §. 8.	» 3
Zweites Capitel. Von der Pyramide.	§. 9. bis §. 19.	» 8
Drittes Capitel. Von der Kugel.	§. 20. bis §. 27.	» 14
Die Statik.	§. 28. bis §. 158.	» 22
Erſte Abtheilung. Syſtem der Statik.	§. 28. bis §. 68.	» 23
Erſtes Capitel. Bedingungen des Gleichgewichts für parallel thätige Kräfte in einer Ebene.	§. 34. bis §. 44.	» 25
Zweites Capitel. Bedingungen des Gleichgewichts für parallel thätige Kräfte in verſchiedenen Ebenen.	§. 45.	» 34

Zweites Capitel. Von der Verengung der Flußprofile und dem Rückstau. . . §. 233. bis §. 235. S. 202

Drittes Capitel. Von der Zeitbestimmung bei Leerung und Füllung von Gefäßen. . §. 236. bis §. 240. = 204

Viertes Capitel. Von der Kraft des bewegten Wassers. §. 241. bis §. 257. = 208

Fünftes Capitel. Vom Heber und den Pumpen. . . §. 258. bis §. 269. = 222

Körperberechnungen.

Erſtes Kapitel.

Vom Prismen.

§. 1.

Erklärungen.

Jeder Körper, welcher von zwei congruenten parallelen Ebenen, und außer dieſen von ſo vielen Parallelogrammen begränzt iſt, als jede der beiden Ebenen Seiten hat, heißt ein **Prismen**. Die erwähnten beiden Ebenen heißen die **Grundebenen**; die Parallelogramme die **Seitenebenen** des Prismens. Die geraden Linien, in welchen je zwei Seitenebenen eines Prismens ſich durchſchneiden, heißen **Seitenkanten**; diejenigen aber, in welchen eine Seitenebene und eine Grundebene ſich ſchneiden, **Grundkanten**. Der normale Abſtand der Grundebenen heißt **die Höhe**. Ein Prismen heißt 3-, 4-, u. ſ. w. ſeitig, je nachdem die Grundebenen Dreiecke, Vierecke u. ſ. w. ſind. Ein Prismen heißt **normal**, wenn die Seitenebenen rechtwinklicht auf den Grundebenen ſtehen, außerdem heißt daſſelbe **ſchief**. Ein Prismen wird insbeſondere **Parallelepipedum** genannt, wenn die Grundebenen

Parallelogramme ſind; ſind Grund- und Seitenebenen Quadrate, ſo heißt daſſelbe Cubus oder Würfel. Ein Prismen wird Cylinder oder Walze genannt, wenn die Grundebenen Kreiſe ſind. Die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Grundebenen eines Cylinders heißt die Achſe deſſelben. Ein Cylinder heißt normal, wenn ſeine Achſe rechtwinklicht auf den Grundebenen ſteht, außerdem ſchief. Die Oberfläche eines Cylinders, die Grundebenen ausgeſchloſſen, heißt Mantel.

§. 2.

Allgemeiner Grundſatz für alle Körperberechnungen.

Körper ſind gleich groß, wenn ſie auf gleich großen Ebenen ſtehen, und alle mit dieſen Ebenen parallele Durchſchnitte in gleichen Entfernungen von denſelben gedacht, Paar und Paar gleiche Größen haben.

§. 3.

Lehrſatz. Mit den Grundebenen parallele Durchſchnittsebenen eines Prismens ſind den Grundebenen congruent.

Beweis. Zerlegt man die Grundebene und eine mit ihr parallele Durchſchnittsebene durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke, ſo ergiebt ſich nach dem Satz: daß Parallelen zwiſchen Parallelen gleich groß ſind, die Congruenz von jedem Paare der entſtehenden Dreiecke, und ſomit auch die Congruenz beider Ebenen.

§. 4.

Lehrſatz. Prismen verhalten ſich wie die Producte aus Grundebene in Höhe.

Beweis. Nach §. 2. und 3. verhalten sich Prismen von gleichen Grundebenen wie ihre Höhen, und Prismen von gleichen Höhen wie ihre Grundebenen, also Prismen überhaupt wie die Producte aus Grundebene in Höhe.

§. 5.

Zusatz. Die Einheit bei Inhaltsbestimmungen von Körpern ist der Cubus, dessen Seite der angenommenen Längeneinheit gleich ist, und unter Inhalt eines Körpers versteht man daher die Anzahl Cubi, welche derselbe in sich aufnehmen kann.

§. 6.

Aufgabe. Den Inhalt eines Prismens (also auch Cylinders) zu bestimmen.

Auflösung. Das Product aus dem Quadratinhalt der Grundebene in die Höhe bestimmt die Anzahl Cubi des Prismens.

Beweis. Die Seite des zur Einheit dienenden Cubus sey = 1; der Inhalt des Cubus = C; die Grundebene des Prismens = F; seine Höhe = h; sein Inhalt = K; so verhält sich nach §. 4.

$$C : K = 1^2 . 1 : F . h$$

und hieraus ist

$$K = F . h . C$$

oder, da C die Einheit ist,

$$K = F . h$$

§. 7.

Aufgabe. Den Mantel des normalen Cylinders zu bestimmen.

Auflösung. Der Mantel eines normalen Cylinders bildet ein rechtwinklichtes Parallelogram, dessen eine Seite die Peripherie der Grundebene des Cylinders, dessen andere der Höhe desselben gleich ist.

§. 8.

Zusatz. Bezeichnet also r den Halbmesser der Grundebenen eines Cylinders, h die Höhe desselben, so ist seine Grundebene $= r^2\pi$ (unter π die Zahl 3,14159.. verstanden), also sein Inhalt $= r^2\pi h$; und wenn der Cylinder normal ist, sein Mantel $= 2r\pi h$; folglich seine gesammte Oberfläche $= 2r\pi h + 2r^2\pi$.

Beispiel. Ein kreisförmiges Gewölbe von 30 Fuß Länge hat den in Fig. 1. dargestellten Querschnitt AEDCFB, in welchem die Höhe im Lichten FG = 4′; die Weite im Lichten BC = 20′; die Dicke der Gewölbsteine EF = 2′ ist, zum normalen Querschnitt; es soll der Cubikinhalt der Gewölbsteine berechnet werden.

Ist H der Mittelpunkt zu den concentrischen Bogen AED und BFC, so verhält sich 4 : 10 = 10 : 2BH − 4 und hieraus ist

$$BH = HC = \frac{29}{2},$$

folglich $AH = HD = BH + FE = \frac{33}{2}$;

und daher $HG = HF - FG = \frac{21}{2}$;

ferner $HC \cos GHC = GH$; oder

$$\frac{29}{2}\cos GHC = \frac{21}{2};\ \text{also}$$

$$\cos GHC = \frac{21}{29};$$

und hiezu nach den trigonometrischen Tafeln genau genug $\angle GHC = 43° 36'$;

dann $HD \cdot \text{Cos } GHD = GH$; oder

$\frac{33}{2} \text{ Cos } GHD = \frac{21}{2}$; folglich

$\text{Cos } GHD = \frac{7}{11}$; also

$\angle GHD = 50° 29'$;

Da nun auch $EG : GD = GD : 2 \cdot EH - EC$

oder $6 : GD = GD : 33 - 6$; so ist

$GD = \sqrt{6 \cdot 27} = 12{,}72792$; folglich

Ausschnitt $HAED = \frac{50° 29'}{180°} \cdot \left(\frac{33}{2}\right)^2 \pi$

$\Delta ADH = 12{,}72792 \cdot \frac{21}{2}$

Ausschnitt $HBFC = \frac{43° 36'}{180°} \cdot \left(\frac{29}{2}\right)^2 \cdot \pi$

$\Delta BCH = 10 \cdot \frac{21}{2}$; demnach das Ringstück

$AEDCFB =$

$$\frac{\pi}{180 \cdot 60}\left[3029 \cdot \left(\frac{33}{2}\right)^2 - 2616 \cdot \left(\frac{29}{2}\right)^2\right] - \frac{21}{2} \cdot 2{,}72792$$

$= 51{,}244$ Quadratfuß;

also der Cubikinhalt der Gewölbsteine =

$30 \cdot 51{,}244 = 1537\frac{1}{3}$ Cubikfuße.

Zweites Kapitel.
Von der Pyramide.

§. 9.
Erklärungen.

Ein Körper, welcher von irgend einer Ebene und ſo vielen an dieſe Ebene ſich anſchließenden, in eine Ecke außerhalb zuſammenſtoßenden Dreiecken, als die erwähnte Ebene Seiten hat, begränzt iſt, heißt eine Pyramide. Die erwähnte Ebene heißt die Grundebene; die Dreiecke Seitenebenen, die der Grundebene gegenüberliegende Ecke, die Spitze. Die Pyramide heißt 3-, 4-, 5-, u. ſ. w. ſeitig, je nachdem die Grundebene ein Dreieck, Viereck u. ſ. w. iſt; ſie heißt ein Kegel, wenn die Grundebene ein Kreis iſt. Die Begränzungsfläche eines Kegels, die Grundfläche ausgeſchloſſen, heißt Mantel. Die Normale von der Spitze auf die Grundebene heißt die Höhe der Pyramide. Beim Kegel wird die gerade Verbindungslinie der Spitze, mit dem Mittelpunkt der Grundebene, die Achſe genannt. Der Kegel heißt normal, wenn ſeine Achſe zugleich die Höhe iſt, außerdem heißt er ſchief; die gerade Verbindungslinie der Spitze eines Kegels mit irgend einem Punkt der Peripherie ſeiner Grundebene, heißt Seite. Wird eine Pyramide parallel mit der Grundebene zerſchnitten, ſo heißt der zwiſchen dieſer Ebene und der Grundebene liegende Theil, Abgekürzte Pyramide; der zwiſchen dieſer

Durchschnittsebene und der Spitze liegende Theil aber, Ergänzungspyramide. Der Begriff von Seitenkanten und Grundkanten ist wie beim Prismen §. 1.

§. 10.

Lehrsatz. Parallele Durchschnittsebenen einer Pyramide, welche alle Seitenkanten derselben durchschneiden, sind ähnlich, und verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Beweis. Die Aehnlichkeit derselben folgt, wenn man sich gleichliegende Diagonalen vorstellt, aus der Proportionalität der 3 Seiten der entstehenden Dreiecke; und da sich ähnliche Figuren wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten, diese Seiten aber in demselben Verhältniß zu einander stehen, wie die Entfernungen der Ebenen von der Spitze der Pyramide, so verhalten sich also auch die Ebenen wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

§. 11.

Aufgabe. Der Inhalt der Grundebene einer Pyramide sey = a; der einer mit ihr parallelen Durchschnittsebene = b; die Entfernung beider Ebenen, oder die Höhe der abgekürzten Pyramide = h; man soll die Höhe x der Ergänzungspyramide bestimmen.

Auflösung. Nach §. 10. verhält sich

$a : b = (h + x)^2 : x^2$; und hieraus

$\sqrt{a} : \sqrt{b} = h + x : x$; folglich auch

$\sqrt{a} - \sqrt{b} : \sqrt{b} = h : x$ und hieraus ist

$x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; oder wenn man Zähler und Nenner dieſes Bruchs mit $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ multiplicirt,

$$x = \frac{h(b+\sqrt{ab})}{a-b}.$$

§. 12.

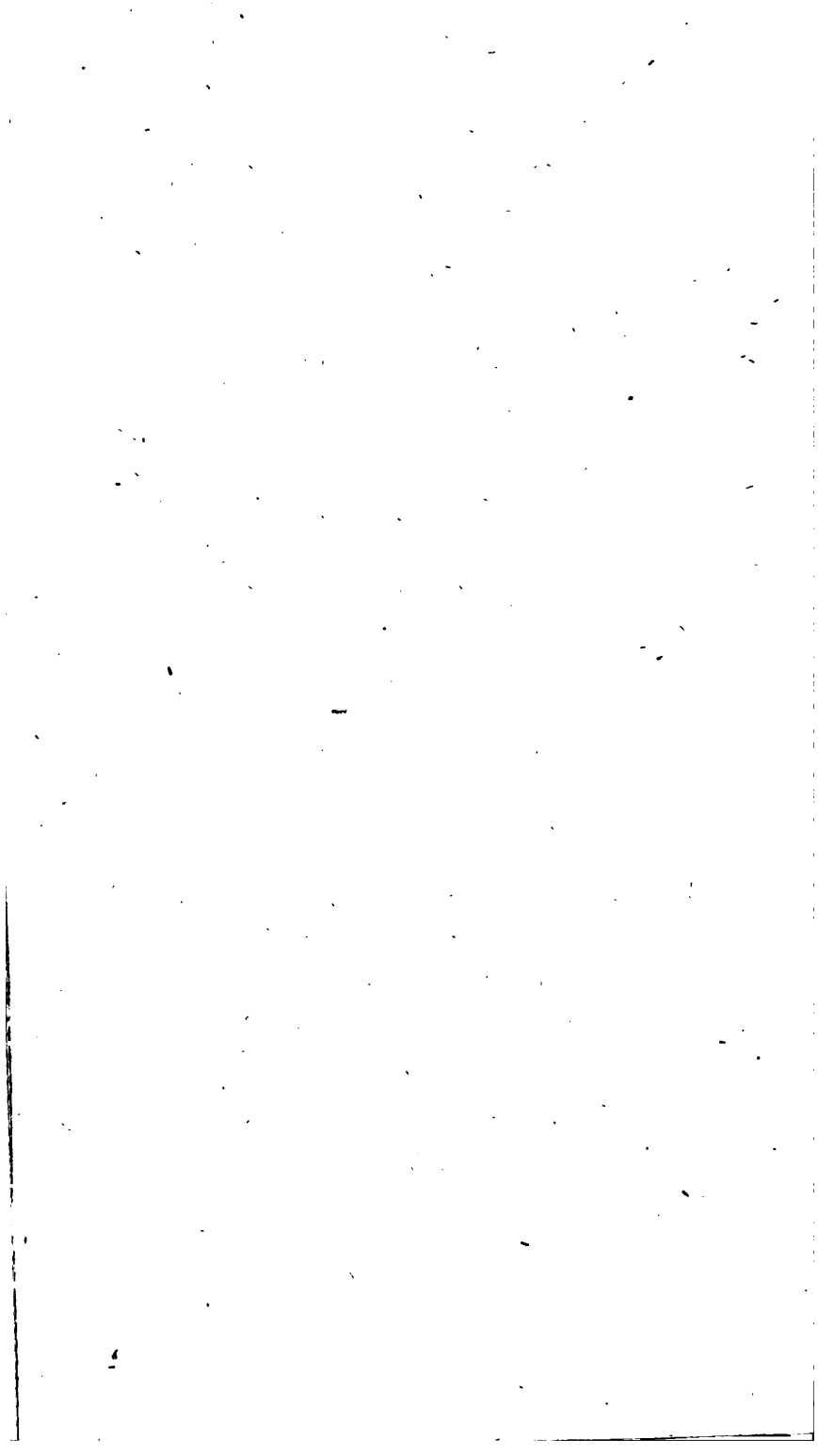
Lehrſatz. Pyramiden von gleichen Grundebenen und gleichen Höhen ſind gleich.

Beweis. Aus §. 10. folgt leicht, daß mit den Grundebenen parallel in gleicher Höhe genommene Durchſchnittsebenen auch gleiche Größe haben, und hieraus folgt dann, nach §. 2., die Gleichheit beider Körper.

§. 13.

Die dreiſeitige Pyramide iſt dem dritten Theil des Prismens gleich, welches mit der Pyramide gleiche Grundebene und gleiche Höhe hat.

Beweis. Das dreyſeitige Prismen ABCDEF Fig. 2. denke man ſich durch die Ebenen DBF und ABF in die 3 dreiſeitigen Pyramiden DEFB, ADFB und ACFB zerſchnitten, denke ſich dann in den beiden erſten, DEB und ABD als die Grundebenen, F aber als die Spitze, ſo hat man für beide gleiche Grundebenen und gleiche Höhe nemlich die Normale von F auf die Ebene ABCD, und folglich ſind beide nach §. 12. einander gleich. Eben ſo ergiebt ſich die Gleichheit der Pyramiden ADFB und ACFB, wenn man B als die Spitze betrachtet, und folglich ſind alle 3 gleich



groß. Setzt man alſo den Inhalt jeder der 3 Pyramiden = P; den des Prismens = Q; ſo iſt

$$3P = Q; \text{ folglich}$$
$$P = \tfrac{1}{3}Q.$$

§. 14.

Aufgabe. Den Inhalt jeder Pyramide zu beſtimmen.

Auflöſung. Der Inhalt der Grundebene ſei = a; die Höhe = h; ſo iſt nach §. 13. und 6., wenn die Pyramide dreiſeitig iſt, ihr Inhalt $= \frac{1}{3}ah$, und alſo nach §. 12.; der Inhalt jeder Pyramide, folglich auch der des Kegels $= \frac{1}{3}ah$.

§. 15.

Aufgabe. Den Mantel des normalen Kegels zu beſtimmen.

Auflöſung. Ein ſolcher Mantel bildet einen Kreisausſchnitt, deſſen Halbmeſſer die Seite des Kegels, deſſen Bogen aber die Peripherie der Grundebene iſt, und das halbe Product beider giebt alſo den Inhalt des Mantels. Bezeichnet r den Halbmeſſer der Grundebene, b die Seite, ſo iſt alſo der Mantel $b.r\pi$.

§. 16.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt der abgekürzten Pyramide zu beſtimmen.

Auflöſung. Bei derſelben Bezeichnung, wie in §. 11., iſt der Inhalt der ganzen Pyramide

$$= \tfrac{1}{3}a\,(h + x),$$

der der Ergänzungspyramide

$$= \tfrac{1}{3}bx; \text{ folglich der der abgekürzten}$$

$= \frac{1}{3}a(h + x) - \frac{1}{3}bx$; oder

$= \frac{1}{3}[a\,h + (a - b)\,x]$; und wenn man den Werth für x aus §. 11. substituirt

$= \frac{1}{3}h(a + b + \sqrt{ab})$.

§. 17.

Zusatz. Bezeichnen r, ϱ die Halbmesser der Grundebenen eines abgekürzten Kegels, h die Höhe desselben, so ist, wenn man $r^2\pi$ für a; $\varrho^2\pi$ für b schreibt, nach §. 16. der Inhalt des abgekürzten Kegels =

$\frac{1}{3}\pi h(r^2 + \varrho^2 + r\varrho)$.

§. 18.

Aufgabe. Den Mantel des normalen abgekürzten Kegels zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet r den Halbmesser der Grundebene; ϱ den der parallelen Begränzungsebene; b die Seite des abgekürzten Kegels; x die des Ergänzungskegels, so ist der Mantel des ganzen Kegels $= (b + x)\,r\pi$ §. 15.; der des Ergänzungskegels $= x.\varrho\pi$; folglich der des abgekürzten

$= (b + x)\,r\pi - x\varrho\pi$; oder

$= \pi[br + (r - \varrho)x]$

Es verhält sich aber

$r : \varrho = b + x : x$

und hieraus ist $(r - \varrho)\,x = b\varrho$; folglich, wenn man diesen Werth substituirt, der verlangte Mantel =

$\pi b(r + \varrho)$.

§. 19.

Beispiele. 1) Die eine der parallelen Begränzungsebenen einer abgekürzten Pyramide sey = 16 Quad.

Fuß; die Höhe der abgekürzten Pyramide = 12 Fuß; ihr Inhalt = 160 Cub. Fuß. Wie groß iſt der Inhalt der andern parallelen Ebene?

Er ſey = x; ſo iſt die Gleichung

$$160 = \tfrac{1}{3} \cdot 12 \cdot (16 + x + \sqrt{16 \cdot x})$$

und hieraus

$$x + 4\sqrt{x} - 24 = 0; \quad \text{alſo}$$

$$\sqrt{x} = -2 + \sqrt{4 + 24}; \quad \text{folglich}$$

$$x = 32 - 4\sqrt{28} = 10{,}836 \text{ Quadratfuß.}$$

2) Die parallelen Begränzungsebenen eines abgekürzten Kegels ſollen ſich wie 3 : 2 verhalten, die Höhe = 24 Fuß, der Inhalt des Körpers = 200 Cubikfuß ſeyn. Die Halbmeſſer der Grundebenen zu beſtimmen.

Sie ſollen x und y heißen, ſo hat man die Gleichungen

$$x^2 : y^2 = 3 : 2;$$

$$200 = \tfrac{1}{3} \cdot 24 \cdot \pi \cdot (x^2 + y^2 + xy);$$

und aus ihnen

$$y = \sqrt{\frac{50}{\pi(5 + \sqrt{6})}} = \sqrt{\frac{50(6 - \sqrt{6})}{\pi \cdot 19}}$$

$$= 1{,}46, \quad \text{folglich}$$

$$x = 1{,}46 \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}} = 1{,}788 \ldots$$

Drittes Kapitel
Von der Kugel.

§. 20.
Erklärungen.

Ein Körper, welcher von einer einzigen Fläche begränzt ist, die durchaus von einem innerhalb liegenden Punct gleichweit absteht, heißt eine **Kugel**. Der erwähnte Punct heißt der Mittelpunkt; die begränzende Fläche, die **Kugelfläche**. Die gerade Linie vom Mittelpunct bis zu irgend einer Stelle der Kugelfläche heißt **Halbmesser**; die gerade Linie von irgend einem Punct der Kugelfläche durch den Mittelpunct bis wieder zur Kugelfläche heißt **Durchmesser oder Achse der Kugel**. Jede durch die Kugel gelegte Ebene ist, wie sich sogleich ergiebt, ein Kreis, und heißt **größter Kreis**, wenn sie durch den Mittelpunct der Kugel geht, **kleinerer Kreis**, wenn dies nicht der Fall ist. Wenn man sich auf eine Kreisebene, als Durchschnittsebene einer Kugel, im Mittelpunct derselben eine Normale errichtet, und beiderseits bis zur Kugelfläche verlängert denkt, so heißt diese Linie die **Achse des Kreises**, und ihre Endpuncte in der Kugelfläche, die **Pole** desselben. Jede Ebene durch die Kugel theilt sowohl die Kugel selbst, als ihre Oberfläche in 2 Theile; jene heißen **Kugelabschnitte**, diese **Calotten**. Jedes zugehörige Stück der Achse heißt die **Höhe** des entsprechenden Kugelabschnitts, so wie auch der **Calotte**. Jede 2 durch die Kugel gelegte Paral-

lelebenen ſchneiden von der Oberfläche der Kugel einen Theil zwiſchen ſich ab, welcher Zone genannt wird; der zugehörige Körper heißt Körperliche Zone. Das zwiſchen den erwähnten Ebenen abgeſchnittene Stück der zugehörigen Achſe heißt Höhe der Zone. Ein Kugelausſchnitt iſt ein zwiſchen einer Calotte und einem Kegelmantel, deſſen Spitze im Mittelpunct der Kugel fällt, liegendes Stück der Kugel.

§. 21.

Aufgabe. Den Flächeninhalt der Zone zu beſtimmen.

Auflöſung. Er iſt gleich der Höhe derſelben multiplicirt mit der Peripherie eines größten Kreiſes der Kugel, oder wenn h die Höhe der Zone, r den Halbmeſſer der Kugel ausdrückt, ſo iſt die Zone

$$= 2r\pi . h.$$

Beweis. Iſt ABC Fig. 3. ein Quadrant, AB = AC = r; DE ein ſehr kleiner Bogen, ſo klein, daß derſelbe als eine gerade Linie zu betrachten iſt, DF = FE; EH, FI, DK Normalen auf AC; EG normal auf DK, ſo kann die Zone z, welche DE bei der Umdrehung um AC beſchreibt, als ein abgekürzter Kegelmantel betrachtet werden, und der Quadratinhalt Z iſt alſo nach §. 18.

$$= \pi . DE . (DK + EH).$$

Es iſt aber

$$2 . FI = DK + EH; \text{ folglich}$$

$$z = 2\pi . DE . FI.$$

Weil nun $\triangle DEG \sim AFI$, ſo verhält ſich $r : FI = DE : EG$,

und also ist DE . FI = r . EG, oder EG = HK durch e ausgedrückt, DE . FI = r . e; also z = 2πr . e.

Besteht nun h aus n solchen unendlich kleinen Theilchen e, so ist also jede zugehörige Zone = 2rπ . e; folglich die Summe aller = n . 2rπ . e; aber ne = h; folglich die Zone zur Höhe h gleich 2rπ . h.

§. 22.

Zusatz. Ist Fig. 3. CH = h; HE = b; CE = a; der Halbmesser der Kugel = r; so ist die Calotte, welche der Bogen EC bei der Umdrehung um AC beschreibt, = 2rπ . h (nach §. 21.), oder auch = $a^2\pi$; oder auch = $(b^2 + h^2)\pi$; und also die Oberfläche der Halbkugel = $2r^2\pi$; und die der ganzen Kugel = $4r^2\pi$, also viermal so groß wie die größte Kreisebene derselben.

§. 23.

Aufgabe. Den Inhalt K des Kugelausschnitts zu bestimmen.

Auflösung. Dreht sich der Kreisausschnitt AEC Fig. 3. um AC, so ist der entstehende Kugelausschnitt als eine Pyramide zu betrachten und zu berechnen, deren Grundebenen die Calotte, und deren Höhe der Halbmesser der Kugel = r ist. Wird daher CH durch h ausgedrückt, so ist der Inhalt des Kugelausschnitts = 2 . rπh . $\frac{1}{3}$r; oder K = $\frac{2}{3}r^2\pi$. h.

§. 24.

Zusatz. Setzt man r für h und nimmt das Doppelte des Resultats, so hat man nach dem vorigen §.

den

den Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3}r^3\pi$; oder auch, wenn d den Durchmesser der Kugel bezeichnet $= \frac{1}{6}d^3 . \pi$.

§. 25.

Aufgabe. Den Inhalt K des Kugelabschnitts zu bestimmen.

Auflösung. Er ergiebt sich, wenn man vom Inhalt des Kugelausschnitts den des zugehörigen Kegels abzieht.

Ist etwa Fig. 11 CH $= h$; HE $= b$; der Halbmesser der Kugel $= r$; so ist der Kugelabschnitt, welchen ENCH bei der Umdrehung um CH beschreibt, nach §. 23.

$= \frac{2}{3}r^2\pi h - EH^2 . \pi . \frac{1}{3}AH$

$= \frac{1}{3}\pi . [2r^2 h - b^2 . (r - h)]$

oder, weil $h : b = b : 2r - h$ ist, so hat man, durch r und h ausgedrückt, $K = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$ und durch b und h ausgedrückt,

$$K = \frac{1}{6}\pi h . (3b^2 + h^2)$$

§. 26.

Aufgabe. Den Inhalt K der körperlichen Zone zu bestimmen.

Auflösung. Es ist gleich der Differenz zweier Kugelabschnitte. Bezeichnet a den Halbmesser der untern, b den der obern begränzenden Kreisebene, h die Höhe der körperlichen Zone; x die Höhe des ergänzenden Kugelabschnitts, so ist nach §. 25.

$K = \frac{1}{6}\pi (h + x) [3a^2 + (h + x)^2] - \frac{1}{6}\pi x (3b^2 + x^2)$

$= \frac{1}{6}\pi [3a^2 h + h^3 + (3a^2 + 3h^2 - 3b^2) x + 3h x^2]$

Es iſt aber, wenn r den Halbmeſſer der Kugel bezeichnet,

$x : b = b : 2r - x$ und

$x + h : a = a : 2r - x - h$; alſo

$x + h : a = a : \frac{b^2}{x} - h$ und hieraus

$hx^2 + (a^2 + h^2 - b^2)\, x = b^2 h$ folglich

$3hx^2 + (3a^2 + 3h^2 - 3b^2)\, x = 3b^2 h$;

daher, wenn man ſubſtituirt;

$K = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 h + h^3 + 3b^2 h)$ oder

$K = \frac{1}{6}\pi h^2\,(3a^2 + 3b^2 + h^2)$

§. 27.

Beiſpiele. 1) Eine 4′ hohe Calotte enthält 200 Quadratfuß, wie groß iſt der Halbmeſſer r der zugehörigen Kugel?

Die Gleichung iſt

$2r\pi . 4 = 200$, und hieraus iſt $r = 7{,}95\ldots$

2) Die Kugelfläche ſey $= b^2$; man ſoll durch b^2 den Inhalt x der Kugel ausdrücken.

Bezeichnet r den Halbmeſſer der Kugel, ſo iſt

$4r^2\pi = b^2$; alſo

$r = \sqrt{\frac{b^2}{4\pi}}$; daher

$x = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}\pi . \frac{b^2}{4\pi} . \sqrt{\frac{b^2}{4\pi}} = \frac{b^3}{6} . \sqrt{\frac{1}{\pi}}$

3) Der Inhalt einer Kugel ſey $= a^3$; man ſoll dadurch den Halbmeſſer r und die Kugelfläche y ausdrücken.

Es iſt $\frac{4}{3}r^3\pi = a^3$; alſo

$r = a . \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$; folglich

$$y = 4r^2\pi = 4\pi \cdot a^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}}; \text{ oder}$$

$$y = a^2 \cdot \sqrt[3]{36 \cdot \pi}$$

4) Die Halbmesser der parallelen Ebenen, welche eine Zone abschneiden, sind 12′ und 8′; die Höhe der Zone = 4′, man soll den Halbmesser r der Kugel, die Größe der Zone Z, und den Inhalt der körperlichen Zone K bestimmen.

Stellt in Fig. 3. DKHE den halben Durchschnitt der Zone dar, ist also EH = 8′, DK = 12′; HK = 4′ und wird, wenn A den Mittelpunct der Kugel andeutet, AK = x gesetzt, so hat man im △ ADK:

$$r^2 = x^2 + 12^2$$

und im △ AEH:

$$r^2 = (x+4)^2 + 8^2; \text{ also}$$

$$x^2 + 144 = x^2 + 8x + 16 + 64$$

und hieraus x = 8; folglich

$$r = \sqrt{8^2 + 12^2} = 14{,}422\ldots$$

daher $z = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot 4 = 362{,}463\ldots$

und nach §. 26.

$$K = \tfrac{1}{6}\pi \cdot 16\,(3 \cdot 12^2 + 3 \cdot 8^2 + 4^2) = 5561{,}643\ldots$$

5) Der Halbmesser einer Kugel sey = r; man soll die Höhe x eines Kugelabschnitts der Bedingung gemäß bestimmen, daß sich der Inhalt des Kugelabschnitts zu dem des zugehörigen Kugelausschnitts = n : m verhält.

Die Gleichung ist

$$\tfrac{1}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (3r - x) : \tfrac{2}{3} \cdot r^2\pi \cdot x = n : m;$$

und hieraus folgt:

$$x = r \cdot \left(\tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{9}{4} - \tfrac{2n}{m}}\right).$$

Der größte Werth, den hienach $\frac{n}{m}$ haben kann, ist also $\frac{9}{8}$, dann ist $x = \frac{3}{2} r$;

Für $\frac{n}{m} = \frac{5}{8}$ entsteht

$$x = r \cdot (\tfrac{3}{2} + \sqrt{1}) = \tfrac{5}{2} r$$

Für $\frac{n}{m} = 1$ entsteht

$$x = r \text{ oder } 2r.$$

Für $\frac{n}{m} = \frac{77}{72}$ erhält man

$$x = \tfrac{7}{6} r \text{ oder } \tfrac{11}{6} r.$$

Die Statik.

Erſte Abtheilung.

Syſtem der Statik.

§. 28.

Erklärung.

Die Statik iſt die Wiſſenſchaft vom Gleichgewicht der Kräfte, d. h. von den Bedingungen, welche ſtatt finden müſſen, damit ein von zwei oder mehreren Kräften angegriffener Gegenſtand vollkommen in dem Zuſtand bleibt, in welchem er war, es ſey Zuſtand der Ruhe, oder der Bewegung, und dieſe Bedingungen heißen: die **Bedingungen des Gleichgewichts.**

§. 29.

Erklär. Wirken 2 oder mehrere Kräfte auf einen Gegenſtand, und es giebt eine Kraft, die, wenn ſie nach einer gewiſſen Richtung allein auf denſelben wirkte, ganz daſſelbe leiſten würde, was jene vereint leiſten, ſo heißt dieſe die **mittlere Kraft**, und jene heißen die **Seitenkräfte.**

§. 30.

Erklär. Wirken 2 oder mehrere Kräfte auf einen Gegenſtand, welche Kräfte untereinander nicht im Gleichgewicht ſind, und es giebt nun noch eine Kraft,

welche, in einer gewissen Lage angebracht, das Gleichgewicht herstellt, so heißt diese die entgegengesetzt mittlere Kraft.

Sind also Kräfte untereinander im Gleichgewicht, so ist jede derselben die entgegengesetzt mittlere der übrigen.

§. 31.

Erklär. Wenn 2 oder mehrere, untereinander nicht Gleichgewicht haltende Kräfte auf einen Gegenstand wirken, welcher durch einen andern an fortgehender Bewegung verhindert wird, aber nicht an drehender um irgend eine Achse, so heißt eine solche Zusammenstellung ein Hebel.

§. 32.

Erklär. Das Product aus der abstracten Zahl, welche die Größe einer Kraft ausdrückt, in die abstracte Zahl, welche die Länge einer Linie angiebt, die sowohl auf der Richtungslinie dieser Kraft, als auch zugleich auf einer andern geraden Linie a normal steht, und von beiden begränzt ist, heißt das statische Moment, oder auch schlechthin, das Moment dieser Kraft in Beziehung auf die Linie a; die Normale selbst heißt der Hebelsarm der Kraft, ebenfalls in Beziehung auf die Linie a.

§. 33.

Wenn Kräfte wirken, so können in Hinsicht der Lage ihrer Richtungslinien nur 4 Fälle statt finden:

1) alle Richtungslinien sind parallel, und liegen in einer und derselben Ebene;

2) alle Richtungslinien ſind parallel, liegen aber in verſchiedenen Ebenen;

3) alle Richtungslinien liegen in einer Ebene, ſind aber nicht alle parallel;

4) ſie liegen in verſchiedenen Ebenen und ſind nicht durchaus parallel,

und hiernach theilt ſich das Lehrgebäude der Statik in vier Capitel.

Anmerk. In den folgenden 4 Capiteln iſt durchaus nur von den Kräften die Rede, welche jedesmal beſonders genannt ſind; andere, insbeſondere Gewicht, muß man gänzlich außer Betracht laſſen.

Erſtes Capitel.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts, wenn zwei oder mehrere Kräfte thätig ſind, deren Richtungslinien durchaus parallel, und in einer und derſelben Ebene liegen.

---

§. 34.

Lehrſatz. Zwei gleich große Kräfte P, Q, welche in 2 Puncten a, b einer geraden feſten Linie, nach der Richtung dieſer Linie aber einander entgegengeſetzt wirken, erhalten Gleichgewicht.

Beweis. Wollte man annehmen: a würde dem Beſtreben von P gemäß, fortbewegt, ſo müßte, dieſer Annahme zufolge, auch der Punct b nach entgegengeſetzter Richtung dem Beſtreben von Q folgen; beides zugleich kann aber nicht ſtatt finden, weil die Linie

fest angenommen ist, daher erfolgt keines von beiden, sondern die Linie bleibt in dem Zustand, in welchem sie war, es sey Zustand der Ruhe, oder der schon nach irgend einer Richtung statt findenden Bewegung.

§. 35.

Zusatz. Aus §. 34. folgt:

1) Es ist gleichgültig, in welchem Punct ihrer geraden Richtungslinie eine Kraft angreift.

2) Die mittlere Kraft und die entgegengesetzt mittlere sind allemal gleich groß; und ihre Richtungen fallen in einander, jedoch entgegengesetzt.

§. 36.

Lehrsatz. Wenn 2 gleich große Kräfte P, Q nach parallelen Richtungslinien bd, cf (Fig. 4.) wirken; in derselben festen Ebene aber, in der Mitte zwischen beiden, so also, daß die Normale ab der Normale ac gleich ist, nach paralleler, aber entgegengesetzter Richtung ag eine Kraft R gleich P + Q thätig ist, so bleibt die angegriffene Ebene in dem Zustand, in welchem sie war, d. h. die Kräfte P, Q, R sind unter einander im Gleichgewicht.

Beweis. Wollte man annehmen, die Ebene bewege sich, den Einwirkungen der gleichen Kräfte P, Q zufolge, nach der Richtung ga, so müßte aus demselben Grund, weil R = P + Q ist, zugleich dieselbe Bewegung, dem Bestreben von R zufolge, nach entgegengesetzter Richtung, also nach ag, statt finden; aber beide Bewegungen zugleich sind nicht möglich, da die Ebene als fest angenommen ist, daher wird keine fort-

so ist $uf = \frac{m}{2} . t$, und eben so $ug = \frac{n}{2} . t$; also

$$uf : ug = m : n$$

Ferner ist $Q = mW$ und $P = nW$; folglich

$$Q : P = m : n$$

daher also $Q : P = uf : ug$

oder $Q . ug = P . uf$.

§. 40.

Lehrsatz. Wenn zwei Kräfte A, B in einer Ebene nach parallelen Richtungslinien wirken, so ist in Beziehung auf jede Achse, welche diese Ebene irgendwo in einem Punct p normal durchschneidet, die algebraische Summe der Momente dieser Kräfte A und B gleich dem Moment ihrer mittleren Kraft $A + B$.

Beweis. 1. Man ziehe aus p eine Normale auf die Richtungslinien der Kräfte A, B; es mögen p und r Fig. 7. die Schneidungspunkte seyn; bezeichnet man nun den Hebelsarm von A, nehmlich pq mit a; dann von B, nehmlich pr mit b; nimmt v als den Durchschnittspunct der nach §. 38. zu bestimmenden Richtungslinie der mittleren Kraft $A + B$ mit pr an, und setzt $pv = m$; die mittlere Kraft selbst, nehmlich $A + B = M$, so ist die Behauptung

$$A . a + B . b = M . m.$$

2) Nach §. 39. ist

$$A . qv = B . vr.$$

Es ist aber $qv = pv - pq = m - a$; und

$vr = pr - pv = b - m$; folglich

$A . (m - a) = B . (b - m)$ und hieraus

$$Aa + Bb = (A + B)\,m; \text{ oder}$$
$$Aa + Bb = Mm.$$

§. 41.

Zusatz. Aus §. 40. folgt

$$m = \frac{Aa + Bb}{M}: \text{ oder}$$

$$m = \frac{Aa + Bb}{A + B}.$$

§. 42.

Aufgabe. Mehrere unter einander Gleichgewicht erhaltende Kräfte A, B, C . . . X, Y, Z wirken nach parallelen Richtungslinien in einer Ebene; ihre Hebelsarme in Beziehung auf eine, diese Ebene irgendwo normal durchschneidende Achse sind = a, b, c . . . x, y, z; man soll die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes darstellen.

Auflösung. 1) Man denke sich zwei der Kräfte, etwa A und B, weggenommen, und dafür ihre mittlere Kraft thätig, so bleibt das Gleichgewicht ungestört; die Größe der neu angebrachten Kraft ist = A + B, und ihr Hebelsarm nach §. 41. = $\frac{Aa + Bb}{A + B}$.

2) Nun nehme man diese neue Kraft und eine der übrigen, etwa C, fort, und bringe statt ihrer die mittlere Kraft beider an, so bleibt das Gleichgewicht noch; die jetzt neu angebrachte Kraft ist = A + B + C, und ihr Hebelsarm nach §. 41.

$$= \frac{(A+B).\frac{Aa+Bb}{A+B}+C.c}{A+B+C}; \text{ oder}$$

$$= \frac{Aa+Bb+Cc}{A+B+C}.$$

3) Man nehme auch diese zweite neue Kraft, und eine der übrigen, etwa D, weg, und lasse dafür ihre mittlere Kraft wirken, so erhält sich das Gleichgewicht immer noch; die jetzt neu angebrachte Kraft ist $= A+B+C+D$, und ihr Hebelsarm, wie in 2) bestimmt,

$$= \frac{Aa+Bb+Cc+Dd}{A+B+C+D}.$$

4) Denkt man sich dies Verfahren fortgesetzt, bis nur noch eine der ursprünglichen Kräfte, etwa Z, bleibt, so hat man nur noch zwei Kräfte thätig, nehmlich Z am Hebelsarm z und die zuletzt neu angebrachte

$$\alpha = A+B+C+\ldots+X+Y$$

am Hebelsarm

$$\beta = \frac{Aa+Bb+Cc+\ldots+X.x+Y.y}{A+B+C+\ldots+X+Y}.$$

5) Da nun aber, nach der Voraussetzung, ein Gleichgewicht unter den ursprünglichen Kräften statt findet, so ist nach §. 30. jede derselben die entgegengesetzt mittlere Kraft der übrigen, d. h. Z und α sind gleich groß, aber entgegengesetzt thätig, und ihre Richtungslinien fallen in einander, oder, es ist:

$$Z = -\alpha \text{ und}$$

$$z = \beta.$$

6) Subſtituirt man die Werthe für α und β aus 4) in 5), ſo entſteht

$$Z = -(A + B + C + \ldots + X + Y) \text{ und}$$

$$z = \frac{Aa + Bb + \ldots + Xx + Yy}{A + B + \ldots + X + Y} \text{ oder}$$

I. $A + B + C + \ldots + X + Y + Z = o$ und

II. $Aa + Bb + \ldots + Y.y + Z.z = o$.

7) Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts für Kräfte, deren Richtungslinien parallel, und in einer Ebene liegen, ſind alſo:

I. Die algebraiſche Summe der Kräfte muß $= o$ ſeyn, damit keine fortgehende Bewegung erfolgt.

II. Die algebraiſche Summe ihrer Momente in Beziehung auf jede die Ebene normal durchſchneidende Achſe muß gleich Null ſeyn, damit keine Drehung erfolgen kann.

§. 43.

Zuſatz. Wirken alſo mehrere unter einander nicht Gleichgewicht haltende Kräfte A, B, C . . . K, L an den Hebelsarmen a, b, c . . . k, l parallel in einer Ebene, und es ſoll die Kraft M mit ihrem Hebelsarm m beſtimmt werden, die noch angebracht werden muß, damit ein Gleichgewicht erfolgt, ſo hat man die Gleichungen

$$A + B + \ldots + K + L + M = o \text{ und}$$

$$Aa + Bb + \ldots + Ll + Mm = o;$$

und

und hieraus

$$M = -(A + B + \ldots + K + L) \text{ und}$$

$$m = \frac{Aa + Bb + \ldots + Ll}{-M}; \text{ oder}$$

$$m = \frac{Aa + Bb + \ldots + Ll}{A + B + \ldots + L};$$

d. h. der Hebelsarm der gesuchten entgegengesetzt mittleren Kraft M wird gefunden, wenn man die algebraische Summe der Momente der gegebenen Kräfte durch die algebraische Summe dieser Kräfte selbst dividirt.

§. 44.

Beispiele. 1) Die Kräfte $A = 10$, $B = 12$ Fig. 7. wirken parallel in der Entfernung $qr = 8'$; man soll den Punct v der mittleren Kraft bestimmen.

Wählt man $qp = 6$, und nimmt die Momente in Beziehung auf p, so hat man

$$pv = \frac{10 \cdot 6 + 12 \cdot 14}{10 + 12} = 10\frac{4}{11}; \text{ also}$$

$$qv = 4\frac{4}{11}.$$

Nimmt man die Momente gleich in Beziehung auf q, so hat man sogleich

$$qv = \frac{10 \cdot 0 + 12 \cdot 8}{10 + 12} = 4\frac{4}{11}.$$

2) Vier Kräfte $A = 10$; $B = -8$; $C = 12$; $D = -16$ wirken in den Entfernungen 4, 2 und 6 Fuß; man soll die Größe und den Ort der mittleren Kraft bestimmen.

Wird die entgegengesetzt mittlere Kraft $= x$; die Entfernung ihrer Richtungslinie von der der Kraft A $= y$ gesetzt, so hat man

$$x = -(10 - 8 + 12 - 16) = +2.$$

$$y = \frac{10.0 - 8.4 + 12.6 - 16.12}{10 - 8 + 12 - 16} = +76.$$

Zweites Kapitel.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts, wenn drei oder mehrere Kräfte thätig sind, deren Richtungslinien parallel, aber nicht in einerlei Ebene liegen.

§. 45.

Aufgabe. Es wirken drei oder mehrere Kräfte A, B, C, ... X, Y, Z parallel in verschiedenen Ebenen. In einer die Richtungslinien derselben normal durchschneidenden Ebene Δ sind zwei rechtwinklicht auf einander stehende Linien l, l' beliebig angenommen, die Normalen aus den Durchschnittspuncten der Richtungslinien der Kräfte mit der Ebene Δ auf l sollen a, b, c, ... x, y, z, die auf l' sollen a', b', c', ... x', y', z' heißen. Man soll bei der Voraussetzung, daß die Kräfte A, B, C, ... Y, Z unter einander Gleichgewicht erhalten, die Bedingungen des Gleichgewichts durch Gleichungen darstellen.

Auflösung. 1) Ist Fig. 8. die Ebene Δ mit den Linien l und l'; f der Durchschnittspunct der Richtung

von A mit Δ, g der von B mit Δ, und ſchneidet gf die Linie l in k unter dem Winkel α; die Linie l' aber in t unter dem Winkel β, ſo iſt, wenn r den Durchſchnittspunct der Richtung der mittleren Kraft M zwiſchen A und B mit Δ andeutet, und die Normalen aus r auf l, und l', durch m und m' ausgedrückt werden,

$$M = A + B$$

$$rk = \frac{A \cdot fk + B \cdot gk}{A + B} \quad \text{§. 41.}$$

$$rt = \frac{A \cdot ft + B \cdot gt}{A + B} \quad \text{§. 41.}$$

oder die zweite Gleichung mit Sin α; die dritte mit Sin β multiplicirt

$$M = A + B$$

$$m = \frac{A.a + B.b}{A + B}$$

$$m' = \frac{Aa' + Bb'}{A + B};$$

und denkt man ſich nun die Kräfte A und B weggenommen, und dafür die M in r thätig, ſo bleibt das Gleichgewicht zwiſchen den Kräften M, C, . . . Y, Z ungeſtört.

2) Nimmt man nun auch M und C fort, und bringt dafür ihre mittlere Kraft N an, ſo iſt eben ſo, wie in 1)

$$N = M + C$$

die Normale zwiſchen l und der Richtung von N,

$$\text{oder } n = \frac{M.m + C.c}{M + C},$$

die zwiſchen dieſer Richtung und l'; oder

$$n' = \frac{M \cdot m' + C \cdot c'}{M + C};$$

oder auch, wenn man die Werthe aus 1) ſubſtituirt

$$N = A + B + C$$

$$n = \frac{Aa + Bb + Cc}{A + B + C}$$

$$n' = \frac{Aa' + Bb' + Cc'}{A + B + C}$$

3) Fährt man ſo fort, bis nur noch eine der urſprünglichen Kräfte, etwa Z übrig bleibt, und ſetzt die mittlere der übrigen = R; die Entfernungen ihrer Richtung von l und l' = ϱ und ϱ', ſo hat man eben ſo

$$R = A + B + \ldots + X + Y$$

$$\varrho = \frac{A.a + Bb + \ldots + Y.y}{A + B + \ldots + Y}$$

$$\varrho' = \frac{Aa' + Bb' + \ldots + Y.y'}{A + B + \ldots + Y}$$

oder

$$R = A + B + \ldots + Y$$

$$\varrho = \frac{Aa + Bb + \ldots + Y.y}{R}$$

$$\varrho' = \frac{Aa' + Bb' + \ldots + Y.y'}{R}$$

4) Da nun aber, der Vorausſetzung nach, Gleichgewicht ſtatt findet, ſo iſt jede der Kräfte, alſo auch Z, die entgegengeſetzt mittlere der übrigen (§. 30.), d. h. es iſt

$$Z' = -R$$
$$z = \varrho$$
$$z' = \varrho'$$

oder, wenn man die Werthe aus 3) substituirt, und die Gleichungen auf Null bringt

I. $A + B + \ldots + Y + Z = 0$

II. $Aa + Bb + \ldots + Yy + Z.z = 0$

III. $Aa' + Bb' + \ldots + Yy' + Z.z' = 0$

welche Bedingungen, eben so wie die in §. 42., leicht in Worte zu übertragen sind.

Beispiel. Es sei $A = 5$; $B = 12$; $C = -10$; $D = 8$; $a = 3$; $b = 4$; $c = 6$; $d = -10$; $a' = 8$; $b' = -6$; $c' = -4$; $d' = 2$;

Man soll für die gewählten Achsen l und l', die Entfernungen m und m', und die Größe M der entgegengesetzt mittleren Kraft bestimmen.

Aus $5 + 12 - 10 + 8 + M = 0$ folgt
$$M = -15,$$

ferner aus $5.3 + 12.4 - 10.6 - 8.10 - 15.m = 0$
$$m = -\tfrac{77}{15};$$

endlich aus $5.8 - 12.6 + 10.4 + 8.2 - 15.m' = 0$
$$m' = +\tfrac{8}{5}.$$

Von den Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die Kräfte nach Richtungslinien wirken, die in einer Ebene liegen, aber nicht parallel sind.

§. 46.

Lehrsatz. In der Peripherie einer geometrischen festen Kreisscheibe, die keine andere Bewegung, als blos eine Drehung um ihre Achse annehmen kann, wirken tangential, aber mit dem Bestreben, entgegengesetzte Drehungen hervor zu bringen, zwei gleich große Kräfte. Es wird behauptet, daß keine Drehung erfolgt.

Beweis. Für beiderlei Drehungen ist gleicher Grund vorhanden, daher wird keine statt finden. §. 34.

§. 47.

Zusatz. In Beziehung auf Drehung um die Achse ist es also gleichgültig, in welchem Punct der Peripherie tangential eine und dieselbe Kraft angebracht wird.

§. 48.

Aufgabe. In einer festen Ebene, welche keine andere Bewegung, als nur Drehung um eine sie in p (Fig. 9.) normal durchschneidende Achse α annehmen kann, wirken Kräfte A, B, C, u. s. w. Es wird vorausgesetzt, daß die Kräfte gegenseitig die Drehung verhindern, also in Beziehung auf die einzig mögliche drehende Bewegung unter einander, Gleichgewicht erhalten, man soll die Bedingung des Gleichgewichts durch eine Gleichung darstellen.

Drittes Kapitel.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die Kräfte nach Richtungslinien wirken, die in einer Ebene liegen, aber nicht parallel sind.

§. 46.

Lehrsatz. In der Peripherie einer geometrischen festen Kreisscheibe, die keine andere Bewegung, als blos eine Drehung um ihre Achse annehmen kann, wirken tangential, aber mit dem Bestreben, entgegengesetzte Drehungen hervor zu bringen, zwei gleich große Kräfte. Es wird behauptet, daß keine Drehung erfolgt.

Beweis. Für beiderlei Drehungen ist gleicher Grund vorhanden, daher wird keine statt finden. §. 34.

§. 47.

Zusatz. In Beziehung auf Drehung um die Achse ist es also gleichgültig, in welchem Punct der Peripherie tangential eine und dieselbe Kraft angebracht wird.

§. 48.

Aufgabe. In einer festen Ebene, welche keine andere Bewegung, als nur Drehung um eine sie in p (Fig. 9.) normal durchschneidende Achse α annehmen kann, wirken Kräfte A, B, C, u. s. w. Es wird vorausgesetzt, daß die Kräfte gegenseitig die Drehung verhindern, also in Beziehung auf die einzig mögliche drehende Bewegung unter einander, Gleichgewicht erhalten, man soll die Bedingung des Gleichgewichts durch eine Gleichung darstellen.

Auflösung. Die Hebelsarme der Kräfte A, B, C, u. s. w. in Beziehung auf die Achse α, sollen a, b, c, u. s. w. heißen. Man ziehe durch p in der Ebene, in beliebiger Richtung eine gerade Linie pq, und beschreibe aus p mit a, b u. s. w. Kreisbogen, bis dieselben pq in n, m u. s. w. durchschneiden, so kann man sich nach §. 47., ohne daß das Bestreben zu Drehung um α eine Aenderung erleidet, die Kräfte A, B u. s. w. in n, m u. s. w. tangential thätig denken. In dieser neuen Lage sind dann die Richtungslinien parallel, und die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes ist also in Beziehung auf die vorausgesetzte, einzig mögliche Bewegung, nemlich die Drehung um α, nach §. 42, II.

$$Aa + Bb + Cc + \ldots = o$$

oder: die algebraische Summe der Momente dieser Kräfte in Beziehung auf die Drehachse, muß = o seyn.

Anmerk. Wirkt eine Kraft A am Hebelsarm a; und man will dafür, eine andere, dasselbe in Beziehung auf Drehung leistende, am Hebelsarm b anbringen, so muß, damit das Moment dasselbe bleibt, ihre Größe $= \frac{Aa}{b}$ seyn. Man nennt dieß: das Reduiren einer Kraft von einem Punct auf einen andern.

§. 49.

Aufgabe. Die Richtungslinien mehrerer thätigen Kräfte A, B, C u. s. w. liegen alle in einer Ebene, und schneiden sich in einen und denselben Punct p Fig. 10. in Beziehung auf eine in derselben Ebene

liegende durch p in willkührlicher Richtung gelegte Linie pq, bezeichnen α, β, γ, u. ſ. w. die Winkel, welche die Richtungslinien der Kräfte A, B, C u. ſ. w. mit pq bilden. Es wird vorausgeſetzt, daß die Kräfte untereinander Gleichgewicht erhalten; man ſoll durch A, B, u. ſ. w.; α, β, γ, u. ſ. w. die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts ausdrücken.

Auflöſung. Da Gleichgewicht ſtatt findet, ſo muß die algebraiſche Summe der Momente in Beziehung auf jede Achſe gleich Null ſeyn. Wählt man daher in pq an einer beliebigen Stelle, nah oder fern, einen Punct r, und denkt ſich durch ihn eine die Ebene normal durchſchneidende Achſe, ſo iſt, weil Gleichgewicht ſtatt findet, nach §. 48.

$$A \cdot rp \operatorname{Sin}\alpha + B \cdot rp \operatorname{Sin}\beta + \ldots = 0$$

oder

$$A \operatorname{Sin}\alpha + B \operatorname{Sin}\beta + \ldots = 0.$$

Es erfolgt aber, nicht blos um die Achſe durch r, ſondern überhaupt um keine einzige Achſe, eine Bewegung; denkt man ſich daher noch eine, an einer ganz beliebigen Stelle, etwa durch f, zieht fp, und ſetzt den beliebigen Winkel $rpf = \varphi$, ſo iſt auch, ebenfalls nach §. 48.

$$A \cdot fp \operatorname{Sin}(\alpha+\varphi) + B \cdot fp \operatorname{Sin}(\beta+\varphi) + \ldots = 0$$

oder

$$A \operatorname{Sin}(\alpha+\varphi) + B \operatorname{Sin}(\beta+\varphi) + \ldots = 0.$$

Um φ zu eliminiren, gebe man der letzten Gleichung durch Auflöſung der Klammern die Form:

$$(A \operatorname{Sin}\alpha + B \operatorname{Sin}\beta + \ldots) \operatorname{Cos}\varphi + (A \operatorname{Cos}\alpha + B \operatorname{Cos}\beta + \ldots) \operatorname{Sin}\varphi = 0.$$

Es iſt aber $A \operatorname{Sin}\alpha + B \operatorname{Sin}\beta + \ldots = o$

folglich auch

$(A \operatorname{Cos}\alpha + B \operatorname{Cos} B + \ldots) \operatorname{Sin}\varphi = o;$

und daher auch, weil φ beliebig iſt,

$A \operatorname{Cos}\alpha + B \operatorname{Cos}\alpha + \ldots = o;$

und die verlangten Bedingungsgleichungen ſind alſo

I. $A \operatorname{Sin}\alpha + B \operatorname{Sin}\beta + \ldots = o$

II. $A \operatorname{Cos}\alpha + B \operatorname{Cos}\beta + \ldots = o.$

§. 50.

Aufgabe. Die Richtungslinien dreier untereinander Gleichgewicht haltender Kräfte A, B, C liegen in einer Ebene, und durchſchneiden ſich in einem und demſelben Punct p Fig. 11. Man ſoll die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts durch A, B, C, und die in der Figur angedeuteten Winkel α, β, γ, ausdrücken.

Auflöſung. Nach dem vorigen §. muß, weil Gleichgewicht ſtatt findet:

1) die algebraiſche Summe der Producte aus den Kräften in die Sinuſſe der Winkel, welche ihre Richtungen mit einer beliebigen durch p in der Ebene gezogenen Linie bilden, gleich Null ſeyn;

2) die algebraiſche Summe der Producte aus den Kräften in die Coſinuſſe dieſer Winkel, ebenfalls $= o$ ſeyn.

Wählt man nun etwa die Richtung von A zu dieſer Linie, ſo hat man die Gleichungen

$A \operatorname{Sin} o + B \operatorname{Sin}\gamma + C \operatorname{Sin}(\alpha+\gamma) = o$ und

$A \operatorname{Cos} o + B \operatorname{Cos}\gamma + C \operatorname{Cos}(\alpha+\gamma) = o;$

oder

$$B \operatorname{Sin}\gamma - C \operatorname{Sin}\beta = o \text{ und}$$

$$A + B \operatorname{Cos}\gamma + C \operatorname{Cos}\beta = o$$

oder auch, wenn man den Werth für C aus der ersten in die zweite substituirt, für die zweite folgende:

$$A + B \operatorname{Cos}\gamma + \frac{B \operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Sin}\beta} \operatorname{Cos}\beta = o;$$

woraus

$$A \operatorname{Sin}\beta + B \operatorname{Sin}(\beta+\gamma) = o \text{ oder}$$

$$A \operatorname{Sin}\beta - B \operatorname{Sin}\alpha = o \text{ entsteht.}$$

Die beiden Gleichungen sind also:

$$B \operatorname{Sin}\gamma - C \operatorname{Sin}\beta = o \text{ und}$$

$$A \operatorname{Sin}\beta - B \operatorname{Sin}\alpha = o,$$

oder, durch eine fortlaufende Proportion ausgedrückt

$$A : B : C = \operatorname{Sin}\alpha : \operatorname{Sin}\beta : \operatorname{Sin}\gamma.$$

§. 51.

Zusatz. Giebt man den beiden Gleichungen

$$B \operatorname{Sin}\gamma - C \operatorname{Sin}\beta = o \text{ und}$$

$$A + B \operatorname{Cos}\gamma + C \operatorname{Cos}\beta = o; \text{ die Form}$$

$$(B \operatorname{Sin}\gamma - C \operatorname{Sin}\beta)^2 = o \text{ und}$$

$$(B \operatorname{Cos}\gamma + C \operatorname{Cos}\beta)^2 = (-A)^2; \text{ so giebt die Summe:}$$

$$B^2 + C^2 + 2BC \operatorname{Cos}(\beta+\gamma) = A^2; \text{ oder}$$

$$A^2 = B^2 + C^2 + 2BC \operatorname{Cos}\alpha,$$

und eben so ist, durch Versetzung der Buchstaben,

$$B^2 = A^2 + C^2 + 2AC \operatorname{Cos}\beta;$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \operatorname{Cos}\gamma.$$

§. 52.

Zusatz. Trägt man auf einer der Richtungslinien, etwa auf der von C, von p aus, eine beliebig lange

Linie pf ab, verlängert die Richtung einer der andern Kräfte, etwa die von A entgegengesetzt, bis sie von der aus f mit der Richtung der dritten Kraft B parallel gezogenen Linie fg in g geschnitten wird, und zieht dann noch ge parallel mit fp bis zum Durchschnittspunct e mit der Richtung von B, so hat man in dem Parallelogram pfge, nach einem bekannten trigonometrischen Satz:

$$pg : pe = \sin peg : \sin pge \text{ und}$$
$$gg : pf = \sin pfg : \sin pgf,$$

oder, weil $\angle peg = pfg = 180 - \alpha$;

$\angle pge = fpg = 180 - \beta$ und

$\angle pgf = epg = 180 - \gamma$ ist:

$$pg : pe = \sin \alpha : \sin \beta \text{ und}$$
$$pg : pf = \sin \alpha : \sin \gamma; \text{ also}$$
$$pg : pe : pf = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Es ist aber, nach §. 50.

$$A : B : C = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

folglich auch:

$$A : B : C = pg : pe : pf,$$

und es finden also nun zwischen den Kräften A, B, C dieselben Vergleichungen statt, welche zwischen der Diagonale pg und den Seiten pe, pf des Parallelograms pfge aufgestellt werden können.

Anmerk. Häufig drückt man die Kräfte durch die proportionalen Linien aus, sagt also die Kraft pe statt: die Kraft B; die Kraft gp statt: die Kraft A; die Kraft pg statt: die Kraft = A, u. s. w.

§. 53.

Erklärungen. 1) Das Parallelogram pfgo heißt: **das Parallelogram der Kräfte**, und iſt von ſehr vielfältiger Anwendbarkeit.

2) Wenn man für 2 Kräfte A, B, deren Richtungslinien ſich in einem Punct p ſchneiden, die mittlere Kraft, alſo diejenige angiebt, welche allein daſſelbe leiſtet, was jene beiden A und B vereint leiſten würden, ſo heißt dieß: **das Zuſammenſetzen der Kräfte.**

3) Wenn man für eine Kraft A, zwei andere B, C, deren Richtungslinien in derſelben Ebene liegen, und die von A in einem und demſelben Punct ſchneiden, angiebt, welche vereint daſſelbe leiſten, was A allein leiſten würde, ſo heißt dieß: **das Zerlegen der Kraft A.**

§. 54.

Aufgabe. Die Richtungslinie zweier Kräfte B und C ſchneiden ſich unter den Winkel α; man ſoll die Kräfte zuſammenſetzen, d. h. man ſoll die Größe und Richtung der mittleren Kraft beſtimmen.

Auflöſung. Man mache Fig. 11.; $po : pf = B : C$ und bilde mit po, pf und α das Parallelogramm opfg, ſo giebt die Diagonale pg die Richtung und — nach demſelben Verhältniß wie po die Größe von B; pf die von C ausdrückt, — die Größe der mittleren Kraft an.

Durch Rechnung erhält man die mittlere Kraft M nach §. 51.; nemlich:

$$M = \sqrt{B^2 + C^2 + 2BC\cos\alpha}$$

und ihre Richtung, wenn man den $\angle fpg = x$ setzt, aus der Proportion

$$M : B = \sin\alpha : \sin x. \quad \S. 50.$$

Anmerk. Läßt man M nicht nach der Richtung pg, sondern nach der gp wirken, so ist M die entgegengesetzt mittlere Kraft zu B und C und die drei Kräfte erhalten also Gleichgewicht.

§. 55.

Aufgabe. Eine gegebene Kraft A in zwei andern, nach gegebenen Richtungslinien, welche sich in einem und demselben Puncte der Richtung von A schneiden, zu zerlegen.

Auflösung. Es sei pg Fig. 12. die Richtungslinie der gegebenen Kraft A; pr, pf die, die Linie pq unter den Winkeln α, β schneidenden, gegebenen Richtungen, der zu bestimmenden Seitenkräfte x, y, welche vereint dasselbe leisten sollen, was A allein leisten würde.

Man nehme pk beliebig groß, ziehe kn ∥ pf; km ∥ pr, so giebt das Parallelogram pnkm die Auflösung, indem

$$A : x : y = pk : pn : pm \text{ ist.}$$

Es folgt nemlich: aus

$$A : x = pk : pn \text{ oder}$$

$$A : x = \sin(\alpha + \beta) : \sin\beta;$$

$$x = \frac{A \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \text{ und eben so:}$$

aus $A : y = pk : pm$ oder

$$A : y = \sin(\alpha + \beta) : \sin\alpha;$$

$$y = \frac{A \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

§. 56.

Zusatz. Ist $\alpha + \beta = R$ oder 90°; so hat man aus §. 35.:

$x = A \operatorname{Sin}\beta = A \operatorname{Cos}\alpha$ und

$y = A \operatorname{Sin}\alpha = A \operatorname{Cos}\beta$.

§. 57.

Aufgabe. In einer Ebene Δ liegen die Richtungslinien mehrerer thätigen Kräfte A, B, C u. s. w., welche untereinander Gleichgewicht erhalten. Die Lage dieser Richtungslinie ist dadurch bestimmt, daß die Winkel, welche sie mit einer in Δ beliebig gezogenen geraden Linie l bilden $= \alpha, \beta, \gamma$ u. s. w., und zugleich auch die Abstände der Durchschnittspuncte der Richtungslinien mit l von einem in l beliebig angenommenen Punct p gleich a, b, c u. s. w. gegeben sind. Man soll die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts angeben.

Auflös. In Fig. 13. ist $pn = a$; $pm = b$; $pk = c$; u. s. w. Man denke sich die Kräfte A, B, C u. s. w. in den Puncten n, m, k u. s. w. wirkend (§. 35. 1.) und zerlege nach §. 55. und 56. jede in zwei Seitenkräfte, von welche die eine normal auf l, die andere in die Richtung von l fällt; man erhält erstere

$= A \operatorname{Sin}\alpha$; $B \operatorname{Sin}\beta$; u. s. w.

letztere $= A \operatorname{Cos}\alpha$; $B \operatorname{Cos}\beta$; u. s. w.

Da nun letztere alle in eine Richtung fallen, so muß, da Gleichgewicht vorausgesetzt ist, nach §. 34. ihre algebraische Summe gleich Null seyn, und dies giebt die Gleichung

$A \operatorname{Cos}\alpha + B \operatorname{Cos}\beta + \ldots = 0$.

Nothwendig besteht also das vorausgesetzte Gleichgewicht unter den parallel thätigen Kräften

$$A \operatorname{Sin} \alpha;\ B \operatorname{Sin} \beta;\ \text{u. s. w.}$$

und man hat daher, ganz nach §. 42.:

$$A \operatorname{Sin} \alpha + B \operatorname{Sin} \beta + \ldots = 0 \quad \text{und}$$
$$a A \operatorname{Sin} \alpha + b B \operatorname{Sin} \beta + \ldots = 0.$$

Die verlangten drei Bedingungsgleichungen sind folglich:

$$\text{I.}\quad A \operatorname{Sin} \alpha + B \operatorname{Sin} \beta + \ldots = 0$$
$$\text{II.}\quad A \operatorname{Cos} \alpha + B \operatorname{Cos} \beta + \ldots = 0$$
$$\text{III.}\quad a A \operatorname{Sin} \alpha + b B \operatorname{Sin} \beta + \ldots = 0,$$

und in diesen drei Gleichungen ist der ganze Inhalt dieses dritten Kapitels ausgesprochen.

§. 58.

Zusatz. Sind die Kräfte B, C u. s. w. nebst β, γ u. s. w. b, c u. s. w. gegeben, und sollen A, α, a der Bedingung gemäß bestimmt werden, daß sämmtliche Kräfte A, B, C u. s. w. untereinander Gleichgewicht erhalten, so hat man,

$$B \operatorname{Sin} \beta + C \operatorname{Sin} \gamma + \ldots = P$$
$$B \operatorname{Cos} \beta + C \operatorname{Cos} \gamma + \ldots = Q$$
$$b B \operatorname{Sin} \beta + c C \operatorname{Sin} \gamma + \ldots = R$$

gesetzt:

1) $A \operatorname{Sin} \alpha = -P$
2) $A \operatorname{Cos} \alpha = -Q$
3) $a A \operatorname{Sin} \alpha = -R$

und hieraus 1) durch 2) dividirt:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{P}{Q};$$

ferner 3) durch 1) dividirt:

$$\alpha = \frac{R}{P};$$

dann 1) und 2) quadrirt und addirt

$$A^2 = P^2 + Q^2; \text{ also}$$

$$A = +\sqrt{P^2+Q^2} \text{ oder } = -\sqrt{P^2+Q^2}$$

wo der eine Werth die mittlere, der andere die entgegengesetzt mittlere Kraft angiebt.

§. 59.

Beispiele. 1) In Beziehung auf eine feste durch p normal zu denkende Achse Fig. 14. wirken vier Kräfte von 5, 8, 10 und 9 Pfund, an den Hebelsarmen von 3, 2, 4 und 6 Fuß, wie die Figur sie andeutet. Die das Gleichgewicht herstellende Kraft x an einem Hebelsarm von 5 Fuß zu bestimmen.

Die Gleichheit ist: (§. 48.)

$$x.5 + 10.4 + 8.2 - 5.3 - 9.6 = 0$$

und hieraus

$$x = \frac{13}{5} = 2\tfrac{3}{5} \text{ Pfund.}$$

2) Die drei Kräfte von 6, 8 und 10 Pfund, wie sie Fig. 15. darstellt, wirken in einer Ebene an dem Punct p unter den Winkeln 100° und 40°; man soll die Größe x der entgegengesetzt mittleren Kraft, und den ihre Richtungslinie bestimmenden Winkel y aufsuchen.

Die Gleichungen sind, nach §. 49.

$$6.\sin 0 + x\sin y + 8.\sin 100 + 10\sin 140 = 0;$$

$$6\cos 0 + x\cos y + 8\cos 100 + 10\cos 140 = 0;$$

oder

Die Gleichungen ſind, nach §. 57.

$$-8 \operatorname{Sin} 30 + 4 \operatorname{Sin} 90 + 10 \operatorname{Sin} 120 + x \operatorname{Sin} y = 0$$
$$-8 \operatorname{Cos} 30 + 4 \operatorname{Cos} 90 + 10 \operatorname{Cos} 120 + x \operatorname{Cos} y = 0$$
$$-5.8 \operatorname{Sin} 30 + 11.4 \operatorname{Sin} 90 + 13.10 \operatorname{Sin} 120 + z.x \operatorname{Sin} y = 0$$

oder, hinreichend ſcharf

$$x \operatorname{Sin} y = -8,66$$
$$x \operatorname{Cos} y = +11,93$$
$$2x \operatorname{Sin} y = -136,58$$

daher, wie in §. 58.

$$\operatorname{tang} y = -\frac{866}{1193}$$

alſo y etwas weniges über 144°;

$$\text{ferner } z = \frac{13658}{866} = 15,77$$

$$\text{und } x = \frac{-8,66}{\operatorname{Sin} 144} = -14,74.$$

Viertes Kapitel.

Von den Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die Kräfte nach Richtungslinien wirken, die nicht in einer Ebene liegen und nicht parallel ſind.

§. 60.

Aufgabe. Es wirken im Raum vertheilt, mehrere untereinander Gleichgewicht erhaltende Kräfte A, B, C, D, u. ſ. w. auf ein feſtes Syſtem; und Fig. 16. ſtelle eine, die Richtungen derſelben in n, m, u. ſ. w. durchſchneidende Ebene Δ dar; in dieſer Ebene

ist ein beliebiger Punct p und durch ihn eine beliebige Linie l gewählt; die Normalen von n, m u. s. w. auf l sollen a, b u. s. w.; die zugehörigen Abscissen auf l, von p aus sollen a', b' u. s. w. heißen. α, β u. s. w. drücken die Winkel aus, welche die Richtungen der Kräfte A, B u. s. w. mit der Ebene Δ; α', β' u. s. w. aber diejenigen, welche ihre Projectionen auf Δ; nemlich n r, m q u. s. w. mit der Linie l bilden. Durch A, B u. s. w., a, b u. s. w., a', b' u. s. w., α, β u. s. w., α', β' u. s. w. die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts auszudrücken.

Auflösung. Man denke sich die Kräfte A, B u. s. w. in den Puncten n, m u. s. w. angreifend, und zerlege jede in zwei Seitenkräfte, die eine normal auf Δ, die andere in Δ, nach der Richtung der Projectionen nr, mq u. s. w. thätig; erstere sind $= A \operatorname{Sin}\alpha$, $B \operatorname{Sin}\beta$, u. s. w., letztere $= A \operatorname{Cos}\alpha$, $B \operatorname{Cos}\beta$, u. s. w. Da nun, der Voraussetzung nach, Gleichgewicht statt findet, also durch die Thätigkeit der Kräfte A, B u. s. w. keine Bewegung nach der auf Δ normalen Richtung erfolgt, so müssen in Beziehung auf die Kräfte $A \operatorname{Sin}\alpha$, $B \operatorname{Sin}\beta$ u. s. w., welche normal auf Δ wirken, die drei Gleichungen §. 45. statt finden, nemlich

$$A \operatorname{Sin}\alpha + B \operatorname{Sin}\beta + \ldots = 0$$
$$a A \operatorname{Sin}\alpha + b B \operatorname{Sin}\beta + \ldots = 0$$
$$a' A \operatorname{Sin}\alpha + b' B \operatorname{Sin}\beta + \ldots = 0.$$

Weil dann ferner auch, durch die Einwirkung der Kräfte $A \operatorname{Cos}\alpha$; $B \operatorname{Cos}\beta$ u. s. w. keine Bewegung nach einer in Δ liegenden Richtung statt findet, in welcher

Gleichgewicht vorausgesetzt ist, so müssen, in Beziehung auf diese Kräfte, die drei Gleichungen §. 57. gelten, nemlich:

$$A \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\alpha' + B \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\beta' + \ldots = 0$$

$$A \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' + B \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + \ldots = 0$$

$$pr.\, A \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\alpha' + pq.\, B \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\beta' + \ldots = 0$$

Es ist aber $pr = a' + a \operatorname{Cotg}\alpha'$;

$pq = b' + b \operatorname{Cotg}\beta'$, u. s. w.;

und setzt man diese Werthe in die letzte der Gleichungen, so hat man folgende 6 Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

I. $A \operatorname{Sin}\alpha + B \operatorname{Sin}\beta + \ldots = 0$

II. $a A \operatorname{Sin}\alpha + b B \operatorname{Sin}\beta + \ldots = 0$

III. $a' A \operatorname{Sin}\alpha + b' B \operatorname{Sin}\beta + \ldots = 0$

IV. $A \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\alpha' + B \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\beta' + \ldots = 0$

V. $A \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' + B \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + \ldots = 0$

VI. $A \operatorname{Cos}\alpha (a' \operatorname{Sin}\alpha' + a \operatorname{Cos}\alpha') + B \operatorname{Cos}\beta (b' \operatorname{Sin}\beta' + b \operatorname{Cos}\beta') + \ldots = 0$

§. 61.

Zusatz. Da zu Bestimmung einer Kraft und ihrer Lage aus diesen Gleichungen, 6 Bedingungen zu erfüllen, und nur 5 Größen zu bestimmen sind, so existirt für die hieher gehörigen Fälle nicht immer eine mittlere Kraft, sondern nur dann, wenn die gegebenen Größen einer aufzusuchenden Bedingung entsprechen. Diese folgt im nächsten §.

§. 62.

Aufgabe. Es sind die Kräfte B, C u. s. w. nebst denen ihre Lage bestimmenden Größen b, c u. s. w.

b', c' u. ſ. w ; β, γ u. ſ. w.; β', γ' u. ſ. w. gegeben; man ſoll die Bedingungsgleichung angeben, welche zwiſchen dieſen Größen ſtatt finden muß, damit ſie eine entgegengeſetzt mittlere Kraft A zulaſſen, und deren Größe, ſo wie auch ihre durch a, a', α, α' beſtimmte Lage, beſtimmt wird.

Auflöſung.

Man bezeichne $B \operatorname{Sin}\beta + C \operatorname{Sin}\gamma + \ldots$ mit N;

$b B \operatorname{Sin}\beta + c C \operatorname{Sin}\gamma + \ldots$ mit M;

$b' B \operatorname{Sin}\beta + c' C \operatorname{Sin}\gamma + \ldots$ mit P;

$B \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\beta' + C \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Sin}\gamma' + \ldots$ mit Q,

$B \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\beta' + C \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\gamma' + \ldots$ mit R,

$B \operatorname{Cos}\beta(b' \operatorname{Sin}\beta' + b \operatorname{Cos}\beta') + C \operatorname{Cos}\gamma(c' \operatorname{Sin}\gamma' + c \operatorname{Cos}\gamma') \ldots$ mit T,

ſo hat man die 6 Gleichungen

1) $A \operatorname{Sin}\alpha = -N$

2) $a A \operatorname{Sin}\alpha = -M$

3) $a' A \operatorname{Sin}\alpha' = -P$

4) $A \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\alpha' = -Q$

5) $A \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' = -R$

6) $a' A \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\alpha' + a A \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\alpha' = -T$

Aus 2) dividirt durch 1) folgt

$$a = \frac{M}{N}$$

Aus 3) dividirt durch 1) aber

$$a' = \frac{P}{N};$$

und ſetzt man dieſe Werthe, ſo wie 4) und 5) in 6), ſo entſteht

$$-\frac{P}{N} \cdot Q - \frac{M}{N} \cdot R = -T; \text{ oder}$$

$$PQ + MR - NT = 0,$$

welches die verlangte Bedingungsgleichung zwischen den Größen B, C u. s. w., b, c u. s. w., b', c' u. s. w., β, γ u. s. w., β' γ' u. s. w. ist.

§. 63.

Aufgabe. Die im vorigen § hergeleitete Bedingungsgleichung findet statt; man soll A, a, a', α, α' bestimmen.

Auflösung. Es ergiebt sich, bei der im vorigen §. eingeführten Bezeichnung leicht;

$$a = \frac{M}{N}$$

$$a' = \frac{P}{N}$$

$$\text{tang } \alpha' = \frac{Q}{R}$$

$$A = \sqrt{N^2 + Q^2 + R^2}$$

$$\text{Sin } \alpha = \frac{-N}{\sqrt{N^2 + Q^2 + R^2}}$$

oder auch, für die beiden letzten:

$$\text{tg } \alpha = \frac{N}{Q} \text{ Sin } \alpha'$$

$$A = \frac{-N}{\text{Sin } \alpha}$$

§. 64.

Beispiel. Es sey $B = 4$; $C = 12$; $D = -10$;
$b = 2$; $c = -3$; $d = -2$;
$b' = x$; $c' = 1$; $d' = 3$;
$\beta = 30°$; $\gamma = 90°$; $\delta = 60°$;
$\beta' = 60°$; $\delta' = 30°$;

Man soll fürs Gleichgewicht b' und A, a, a', α, α' bestimmen.

Es ergiebt sich $N = 5{,}34$

$M = -14{,}68$

$P = 2x - 13{,}98$

$Q = 0{,}5$

$R = -2{,}598$

$T = 3x + 4{,}624$

und nun, aus der Bedingungsgleichung

$$PQ + MR - NT = 0$$

$b' = x = 0{,}43,$

so daß also jetzt $P = -12{,}12$

$T = 5{,}914$ ist.

Man erhält sodann aus §. 63.

$a = -2{,}749$

$a' = -2{,}457$

$\alpha' = 169° 7'$

$\alpha = 63° 37'$

$A = -5{,}9609.$

Fünftes Capitel.

Vom Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

---

§. 65.

Die in den 4 abgehandelten Capiteln hergeleiteten Bedingungsgleichungen sind:

I. Für parallel thätige Kräfte in einer Ebene

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ A + B + \ldots = 0 \\ 2)\ aA + bB + \ldots = 0 \end{array}\right\} \text{§. 42.}$$

ſich auf fortgehende oder geradlinigte, und ſolche, welche ſich auf drehende Bewegung beziehen, und zwar erſcheinen in jedem Capitel, in allen dieſen Gleichungen, in jeder die Richtungen der in ihr vorkommenden Kräfte, als parallel, gegenſeitig aber, als rechtwinklicht.

Nun kann aber bewieſen werden:

1) daß jede Gleichung der erſten Art, alſo jede, welche die algebraiſche Summe thätiger Kräfte als Null darſtellt, einerlei iſt mit derjenigen, welche entſteht, wenn man ſich irgend eine Bewegung des Syſtems vorſtellt, jede Kraft mit dem Weg, den ihr Angriffspunct dann zurücklegen würde, multiplicirt, und die algebraiſche Summe dieſer Producte gleich Null ſetzt.

2) Daß jede Gleichung der zweiten Art, alſo jede, welche die algebraiſche Summe der Momente der thätigen Kräfte, in Beziehung auf irgend eine, mit ihren Richtungen rechtwinklichte Achſe als Null darſtellt, einerlei iſt mit derjenigen, welche entſteht, wenn man ſich wirklich Drehung um dieſe Achſe vorſtellt, jede Kraft mit dem Weg, den der Endpunct ihres Hebelsarms dann durchlaufen würde, multiplicirt, und die algebraiſche Summe dieſer Producte gleich Null ſetzt; und dieſe beiden Geſetze, deren Wahrheit im folgenden §. bewieſen werden wird, bilden das Prinzip der virtuellen Geſchwindigkeiten oder des Beſtrebens zur Bewegung.

§. 66.

Lehrsatz. Die Richtigkeit des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten zu beweisen.

Beweis. 1) Wenn Kräfte A, B, C u. s. w., deren Richtungslinien parallel sind, und in einer oder in verschiedenen Ebenen liegen, unter einander Gleichgewicht erhalten, und man denkt sich das ganze System nach der Richtung der thätigen Kräfte um den Weg v fortbewegt, so muß, wegen der parallelen Lage aller Richtungslinien, jeder Punct jeder Richtungslinie den Weg v durchlaufen. Nun ist aber, weil Gleichgewicht statt findet

$$A + B + C + \ldots = o,$$

und folglich auch

$$Av + Bv + Cv + \ldots = o,$$

welche Gleichung die Richtigkeit des Prinzips in Beziehung auf Bestreben zu fortgehender geradliniger Bewegung ausspricht.

2) Denkt man sich irgend eine Achse und setzt die Hebelsarme der Kräfte A, B, C u. s. w. in Beziehung auf dieselbe = a, b, c u. s. w., so ist, wenn Gleichgewicht statt findet, wie vorausgesetzt wird,

$$Aa + Bb + Cc + \ldots = o.$$

Wenn man sich nun eine, irgend einen Winkel φ zugehörige (nicht erfolgende) Drehung um diese Achse vorstellt, und die Bogen, welche die Endpuncte der Hebelsarme dann durchlaufen würden, $= \alpha, \beta, \gamma$ u. s. w. setzt, so verhält sich, wie man leicht übersieht

$$a : b : c \text{ u. s. w.} = \alpha : \beta : \gamma \text{ u. s. w.},$$

mit gf; die z aber nach der Richtung nh, unter dem Winkel β mit km thätig ist, im Gleichgewicht erhalten werden.

Nach 57. sind, in Beziehung auf die Linie nm und eine durch n normal zu denkende Achse, die Gleichungen:

1) $z \operatorname{Sin}(\beta - \alpha) + y \operatorname{Sin}(360 - \alpha) + A \operatorname{Sin}(180 - \alpha) + x \operatorname{Sin}(270 - \alpha) = 0$

2) $z \operatorname{Cos}(\beta - \alpha) + y \operatorname{Cos}(360 - \alpha) + A \operatorname{Cos}(180 - \alpha) + x \operatorname{Cos}(270 - \alpha) = 0$

3) $0 \cdot z \operatorname{Sin}(\beta - \alpha) + 0 \cdot y \operatorname{Sin}(360 - \alpha) + \frac{1}{2} a A \operatorname{Sin}(180 - \alpha) + a \cdot x \operatorname{Sin}(270 - \alpha) = 0$

oder, $\beta - \alpha = \gamma$ gesetzt;

1) $z \operatorname{Sin}\gamma - y \operatorname{Sin}\alpha + A \operatorname{Sin}\alpha - x \operatorname{Cos}\alpha = 0$

2) $z \operatorname{Cos}\gamma + y \operatorname{Cos}\alpha - A \operatorname{Cos}\alpha - x \operatorname{Sin}\alpha = 0$

3) $\frac{1}{2} a A \operatorname{Sin}\alpha - a x \operatorname{Cos}\alpha = 0.$

Aus der dritten Gleichung folgt sogleich

$$x = \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg}. \alpha.$$

Setzt man diesen Werth in 1, und 2; multiplicirt 1) mit $\operatorname{Cos}\alpha$; 2) mit $\operatorname{Sin}\alpha$ und addirt, so erhält man:

$$z = \frac{A \operatorname{tg}. \alpha}{2 \operatorname{Sin}\beta}$$

und nun auch $y = \frac{1}{2} A \left(1 + \frac{\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\alpha}\right)$

Viel leichter wird hier die Arbeit, wenn man für die beiden ersten Gleichungen das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in Beziehung auf fortgehende Bewegungen nach den Richtungen fg und mr in An-

welcher durch $-\beta$ ausgedrückt werden soll. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist, bei dieser Bezeichnung

$$A\alpha - B\beta = 0; \text{ oder}$$

$$A : B = \beta : \alpha$$

d. h. Zwei untereinander Gleichgewicht erhaltende Kräfte verhalten sich umgekehrt, wie die Wege, welche ihre Angriffspuncte, im Fall daß Bewegung entstünde, gleichzeitig durchlaufen würden, und dieses Gesetz ist unter dem Namen des Carteſiſchen Grundsatzes bekannt.

welcher durch $-\beta$ ausgedrückt werden soll. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist, bei dieser Bezeichnung

$$A\alpha - B\beta = 0; \text{ oder}$$

$$A : B = \beta : \alpha$$

d. h. Zwei untereinander Gleichgewicht erhaltende Kräfte verhalten sich umgekehrt, wie die Wege, welche ihre Angriffspuncte, im Fall daß Bewegung entstünde, gleichzeitig durchlaufen würden, und dieses Gesetz ist unter dem Namen des Carteſiſchen Grundsatzes bekannt.

Zweite Abtheilung.

Die Geoſtatik, oder: Anwendungen der ſtatiſchen Geſetze auf das Gleichgewicht feſter Körper untereinander.

Erſtes Capitel.

Vom Schwerpunct.

§. 69.

Erklärung.

Wenn ein feſter Körper von der Kraft der Schwere ergriffen wird, ſo ſind die Richtungen aller thätigen Kräfte als parallel anzuſehen, und die für jede beliebige Lage des Körpers c nach ſtatiſchen Geſetzen zu beſtimmende Richtungslinie der mittleren Kraft heißt eine **Schwerlinie**; der Punct aber, in welchen alle Schwerlinien ſich durchſchneiden, **der Schwerpunct des Körpers**.

Jede Ebene, durch eine Schwerlinie gelegt, heißt eine **Schwerebene**. Zu Beſtimmung des Schwerpuncts eines Körpers ergeben ſich alſo folgende Methoden.

1) Man bestimme zwei Schwerlinien;

2) man bestimme eine Schwerebene und eine Schwerlinie;

3) man bestimme drei Schwerebenen; der jedesmalige Durchschnittspunct ist der verlangte Schwerpunct, und es fällt in die Augen, daß hier nur die Gleichungen §. 65. I. und II. in Anwendung kommen können.

§. 70.

Aufgabe. Eine gerade Linie wird in allen ihren Puncten von der Schwerkraft ergriffen. Man soll ihren Schwerpunct bestimmen.

Auflösung. Er liegt nach §. 37. 3) in der Mitte der Linie.

§. 71.

Aufgabe. Den Schwerpunct eines schweren Kreisbogens zu bestimmen.

Auflösung. 1) Man denke sich den Kreisbogen A B C Fig. 18. in horizontaler Lage; D sei der Mittelpunct des zugehörigen Kreises; Bogen A B = Bogen B C; die Länge des Bogens A B C = a; die der zugehörigen Sehne A C = b; das Gewicht der Längeneinheit des Bogens A B C = W; die Länge des Halbmessers = r; der Mittelpunctswinkel A D C des Bogens a = 2 α.

2) Man ziehe B D und durch D eine Parallele v z mit b, und beziehe die Momente auf diese beiden Linien. Ferner denke man sich in dem zu bestimmenden Schwer-

punct

Halbmesser $DG = r$ und fälle die Normale EN auf AC, so hat man

$\triangle ENC \sim \triangle DGI$; folglich

$EC : CN = r : GI$ und hieraus

$CE \cdot GI = r \cdot CN$

Eben so ergiebt sich wenn man FM normal auf AC zieht

$EF \cdot HP = r \cdot NM$

u. s. w.

und setzt man diese Werthe in a; so entsteht

$ax = r \cdot (CN + NM + \ldots)$

oder

$ax = r \cdot b$; folglich

$x = \frac{r \cdot b}{a}$; oder auch

$a : b = r : x$

d. h. der Bogen verhält sich zur Sehne, wie der Halbmesser zur Entfernung des Schwerpuncts von dem mit der Sehne parallelen Durchmesser.

Da $a = \frac{2\alpha}{360} \cdot 2r\pi$; $b = 2r \operatorname{Sin}\alpha$ ist, so hat man auch

$$x = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\alpha} \cdot r$$

§. 72.

Aufgabe. Den Schwerpunct eines schweren Dreiecks (d. h. einer Dreieckebene, welche in allen ihren Puncten von gleich großen parallel thätigen Kräften angegriffen wird) zu bestimmen.

Auflösung. Ist ABC Fig. 19. das schwere Dreieck, so wird, wenn man eine der Seiten, etwa BC in D halbirt, und aus D nach der gegenüberliegenden Ecke A die gerade Linie DA zieht, der gesuchte Schwerpunct in DA liegen, also DA eine Schwerlinie seyn, denn bildet man die Momente der Gewichte aller mit BC parallelen schweren Linien des Dreiecks in Beziehung auf AD, so ergiebt sich wie im vorigen §. der Abstand des gesuchten Schwerpuncts von DA gleich Null. Halbirt man nun auch, noch eine der Seiten, etwa AC, in E und zieht EB, so liegt aus demselben Grund der gesuchte Schwerpunct auch in BE und folglich ist der Durchschnittspunct F beider Schwerlinien, der Schwerpunct des Dreiecks.

Verbindet man die Puncte D und E durch eine gerade Linie, so ist DE ∥ BA folglich △ DFE ∾ BFA und daher

$$AF : FD = AB : DE$$

also auch

$$AF : FD = BC : DC$$
$$= 2 : 1$$

folglich $AD : FD = 3 : 1$ und daher $DF = \frac{1}{3} DA$.

Bezeichnet man also eine der Höhen des Dreiecks mit h, so ist die Entfernung des Schwerpunctes des Dreiecks von der zugehörigen Grundlinie $= \frac{1}{3} h$

§. 73.

Aufgabe. Den Schwerpunct jedes ebenen schweren Vielecks zu bestimmen.

Auflösung. Es sei ABCDE Fig. 20. das Vieleck in horizontaler Lage gedacht. Man zertheile dasselbe durch Diagonalen AC, AD in die Dreiecke ABC, ACD, ADE und bestimme nach dem vorigen §. die Schwerpuncte F, G, H derselben; nun wähle man in derselben Ebene zwei beliebige normal auf einander stehende Linien NI, NK und fälle auf sie die Normalen FQ, GR. HT, FL, GP, HM, setze das Gewicht der Ebeneneinheit = p, den Abstand des gesuchten Schwerpuncts von NI = x; von NK = y, so hat man die Gleichungen

$$pABCDE.x - q.ABC.FQ - p.ACD.GR - p.ADE.HT = o; \text{ und}$$

$$p.ABCDE.y - p.ABC.FL - p.ACD.GP - p.ADE.HM = o$$

und aus ihnen

$$x = \frac{ABC.FQ + ACD.GR + ADE.HT}{ABCDE};$$

$$y = \frac{ABC.FL + ACD.GP + ADE.HM}{ABCDE}.$$

Zieht man nun in der Entfernung x eine Parallele mit NI und in der Entfernung y eine Parallele mit NK so giebt der Durchschnittspunct beider den verlangten Schwerpunct.

§. 74.

Aufgabe. Den Schwerpunct des schweren Kreisausschnitts zu bestimmen.

Auflösung. Man denke sich den Kreisausschnitt durch Halbmesser in eine Menge sehr kleiner

Kreisausschnittchen getheilt, so klein, daß jedes als ein Dreieck zu betrachten ist, so liegen die Schwerpuncte aller dieser Kreisausschnittchen in dem mit $\frac{2}{3}$ des Halbmessers r beschriebenen concentrischen Bogen (§. 72.), und der Schwerpunct dieses Bogens ist also zugleich der verlangte Schwerpunct des Kreisausschnitts. Seine Entfernung von dem mit der Sehne parallelen Durchmesser ist folglich nach §. 71., bei derselben Bezeichnung $= \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\text{Sin } \alpha}{\alpha} \cdot \frac{2}{3} r$ oder

$$= \frac{120}{\pi} \cdot \frac{\text{Sin } \alpha}{\alpha} \cdot r$$

Für den Halbkreis entspringt hieraus die Entfernung seines Schwerpuncts von seinem Durchmesser

$$= \frac{4}{3\pi} \cdot r.$$

§. 75.

Aufgabe. Den Schwerpunct des schweren Kreisabschnitts zu bestimmen.

Auflösung. Es sei ABC Fig. 18. der schwere Kreisabschnitt; D der Mittelpunct des zugehörigen Kreises; also ADC das zum Kreisausschnitt ABCD ergänzende Dreieck; so ist, $\angle$ ADC $= 2\alpha$; den Halbmesser des Kreises $= r$ gesetzt, in Beziehung auf die mit AC parallele Linie VZ der Hebelsarm des Kreisausschnitts ABC, nach §. 74. $= \frac{120}{\pi} \cdot \frac{\text{Sin } \alpha}{\alpha} \cdot r$ welche Größe e heißen soll: und der Hebelsarm des Dreiecks ADC $= \frac{2}{3} r \text{ Cos } \alpha$ welche Größe durch f ausgedrückt werden soll. Setzt man nun die Entfernung des in

DB liegenden gesuchten Schwerpuncts des Kreisabschnitts von VZ = x, so hat man die Gleichung

$$ABCD \cdot e - ACD \cdot f - ABC \cdot x = 0;$$

und hieraus

$$x = \frac{ABCD \cdot e - ACD \cdot f}{ABC};$$

in welcher Formel

$$ABCD = \frac{\alpha}{180} \cdot r^2 \pi$$

$$ACD = \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Sin} 2\alpha$$

$$ABC = \frac{\alpha}{180} r^2 \pi - \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Sin} 2\alpha$$

$$e = \frac{120}{\pi} \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\alpha} r \text{ und}$$

$$f = \tfrac{2}{3} r \operatorname{Cos} \alpha \text{ ist.}$$

§. 76.

Aufgabe. Den Schwerpunct des concentrischen Ringstücks zu bestimmen. Fig. 21.

Auflösung. Ist ABCD Fig. 21. das concentrische Ringstück, E der zugehörige Mittelpunct; $\angle BEK = KEC = \alpha$; der Halbmesser $BE = EC = r$; der $AE = DE = \varrho$; H der Schwerpunct des Ausschnitts BCE; F der des Ausschnitts ADE; G der gesuchte des Ringstücks; $GE = x$; so hat man

$$BCE \cdot HE - ADE \cdot FE - ABCD \cdot x = 0;$$

also

$$x = \frac{BCE \cdot HE - ADE \cdot FE}{ABCD}$$

Es ist aber $BCE = \frac{\alpha}{180} \cdot r^2 \pi$

Ebene b deren Entfernung von a gleich $\frac{1}{4}h$ ist, und die Ebene b ist folglich eine Schwerebene der Pyramide. Sucht man nun noch den Schwerpunct von a und verbindet denselben mit der Spitze der Pyramide durch eine gerade Linie l, so ist l eine Schwerlinie, folglich der Durchschnittspunct von l mit b der verlangte Schwerpunct, und also seine Entfernung von a gleich $\frac{1}{4}h$.

§. 80.

Aufgabe. Die Entfernung x des Schwerpunctes einer abgekürzten Pyramide von der größeren Grundebene a zu bestimmen.

Auflösung. Die Höhe der abgekürzten Pyramide sei $= h$; die mit a parallele Begränzungsebene derselben $= b$; die Höhe der Ergänzungspyramide werde durch y ausgedrückt, so ist der Inhalt der ganzen Pyramide $= \frac{1}{3}a\,(h + y)$ der, der Ergänzungspyramide $= \frac{1}{3}b\,y$ der, der abgekürzten

$= \frac{1}{3}h\,(a + b + \sqrt{ab})$ (s. §. 14. und 16.)

Ferner, wenn man sich h in horizontaler Lage denkt, und die Momente in Beziehung auf eine in a liegende horizontale Linie nimmt, der Hebelsarm der ganzen Pyramide $= \frac{1}{4}(h + y)$ der, der Ergänzungspyramide $= h + \frac{1}{4}y$ und der, der abgekürzten $= x$.

Setzt man nun die Gewichtseinheit $= p$, so ist also

$p \cdot \frac{1}{3}a\,(h + y) \cdot \frac{1}{4}(h + y) - \frac{1}{3}b\,y\,(h + \frac{1}{4}y) \cdot p - \frac{1}{3}h\,(a + b + \sqrt{ab}) \cdot p \cdot x = 0$; und hieraus

$$x = \frac{a(h + y)^2 - 4bhy - by^2}{4h(a + b + \sqrt{ab})}$$

oder

$$x = \frac{ah^2 + 2h(a - 2b)y + (a - b)y^2}{4h(a + b + \sqrt{ab})}$$

Es iſt aber nach §. 11.

$$(a - b)y^2 = (a - b)y \cdot y = (a - b)y \cdot \frac{h(b + \sqrt{ab})}{a - b}$$

$$= hy(b + \sqrt{ab});$$

folglich $2h(a - 2b)y + (a - b)y^2 =$

$$h[2a - 4b + b + \sqrt{ab}] \cdot y =$$

$$h[2a - 2b - b + \sqrt{ab}] \cdot y =$$

$$h[2(a - b) + \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})]y =$$

$$h[2(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{b}](\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot y$$

oder, nach §. 11.

$$= h[2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}](\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

$$= h^2[3b + 2\sqrt{ab}] \text{ demnach}$$

$$x = \frac{ah^2 + h^2(3b + 2\sqrt{ab})}{4h(a + b + \sqrt{ab})}$$

$$= \frac{h}{4} \cdot \frac{a + 3b + 2\sqrt{ab}}{a + b + \sqrt{ab}}.$$

§. 81.

Aufgabe. Den Schwerpunct einer ſchweren Calotte, oder auch einer Zone zu beſtimmen.

Auflöſung. Bezeichnet h die Höhe und denkt man ſich h aus n gleichen Theilen beſtehend, und durch jeden Theilpunct eine auf h normale Durchſchnittsebene gelegt, ſo ſind alle entſtehende Zonchen nach §. 21. gleich groß, der Schwerpunct jeder liegt in der Mitte des zugehörigen Höhe und folglich iſt auch die Mitte von h der verlangte Schwerpunct.

§. 82.

Aufgabe. Den Schwerpunct eines ſchweren Kugelausſchnitts zu beſtimmen.

Auflöſung. Denkt man ſich mit $\frac{1}{4}$ des Halbmeſſers r eine durch den Kugelausſchnitt begränzte concentriſche Calotte C beſchrieben, ſo liegen in C die Schwerpuncte aller der Pyramidchen deren Summe den Kugelausſchnitt bildet; der Schwerpunct von C iſt alſo auch der Schwerpunct des Kugelausſchnitts und ergiebt ſich daher nach §. 81.

§. 83.

Aufgabe. Den Schwerpunct des Kugelabſchnitts zu beſtimmen.

Auflöſung. Man ergänze denſelben zum Kugelausſchnitt und verfahre dann ganz ſo, wie in §. 75. 76 und 80.

§. 84.

Zuſatz. Nach §. 82 oder auch 83 ergiebt ſich die Entfernung des Schwerpunct einer Halbkugel vom Mittelpunct $= \frac{3}{8}$ des Halbmeſſers.

§. 85.

Aufgabe. Den Schwerpunct der körperlichen Zone zu beſtimmen.

Auflöſung. Man ergänze dieſelbe zum Kugelabſchnitt und verfahre dann wie im §. 83.

Zweites Capitel.

Vom materiellen Hebel und der Stabilität.

§. 86.

Erklär. Wenn Kräfte mit dem Bestreben, Drehung um irgend eine feste Achse hervorzubringen, auf einen schweren Körper wirken, so heißt derselbe ein materieller Hebel. Die Gleichungen fürs Gleichgewicht werden aus demjenigen, der vier Capitel genommen, welches die Lage der Kräfte bestimmt, unter die thätigen Kräfte aber auch noch das Gewicht des Hebels, in seinem Schwerpunct vereint gedacht, aufgenommen. Zu der einfachsten Anwendung des Hebels gehören die Krämerwage und die Schnellwage. Das Moment des Widerstandes des Gewichts des Hebels selbst, in Beziehung auf die Achse genommen, um welche die auf ihn einwirkenden Kräfte, Drehung hervorzubringen streben, oder auch wirklich hervorbringen, gegen diese Drehung, heißt die Standfähigkeit oder Stabilität des Körpers, welcher als Hebel dient.

Vom materiellen Hebel.

§. 87.

Aufgabe. Ein prismetrischer Körper vom Gewicht VV, in horizontaler Lage gedacht, ruht an beiden Enden auf Unterlagen und wird von mehreren Kräften angegriffen; man soll die Einwirkung auf die Unterlagen bestimmen.

Auflösung. 1) **Für den Fall, wenn die Richtungslinien der einwirkenden Kräfte vertical sind.**

Es sei A B C D Fig. 23. der verticale Durchschnitt des Prismens durch seinen Schwerpunct und also auch zugleich Mittelpunct der Länge, F genommen; nach der Richtung der angezeigten Linien wirken außer seinem Gewicht W noch auf ihn die lothrechten Kräfte P, Q, R, deren Richtungslinien die Linie A B in den gegebenen Puncten E, N, M schneiden; die Einwirkungen auf die Unterlagen A, B sollen x, y sein, so hat man nach dem ersten Capitel der Geostatik, die beiden Gleichungen:

$$1) \quad -x + P + W + Q + R - y = 0$$

2) Die Momente etwa in Beziehung auf die durch A normal gedachte Achse genommen:

$$P.AE + W.AG + Q.AN + R.AM - y.AB = 0;$$

und aus beiden Gleichungen folgt:

$$y = \frac{P.AE + W.AG + Q.AN + R.AM}{AB}$$

$$x = \frac{P.BE + W.BG + Q.BN + R.BM}{AB}.$$

2) **Für den Fall, wenn sie nicht vertical sind;** Fig. 24.

Hier erhält man nach dem dritten Capitel bei derselben Bezeichnung und den in der Figur angegebenen Buchstaben, die Würkung nach der Richtung B A, also, wenn Gleichgewicht erfolgen soll, die nach der Richtung A B noch anzubringende Gegenwirkung

$= P\,Cos\,\alpha + Q\,Cos\,\beta$. Ferner

$-x + P\,Sin\,\alpha + W + Q\,Sin\,\beta - y = o$ und

$AE.P\,Sin\,\alpha + AG.W + AN.Q\,Sin\,\beta - y.AB = o$;

alſo

$$y = \frac{AE.P\,Sin\,\alpha + AG.W + AN.Q\,Sin\,\beta}{AB};$$

$$x = \frac{BE.P\,Sin\,\alpha + BG.W + BN.Q\,Sin\,\beta}{AB}.$$

§. 88.

Aufgabe. Die Unterlagen bei A und B Fig. 23. ſind weggenommen, wo muß eine angebracht werden, damit keine Drehung erfolgt?

Auflöſung. Setzt man die Entfernung von A bis zu der geſuchten Stelle $= x$, die Einwirkung auf die Unterlage $= y$; ſo hat man, die Momente auf A genommen, die Gleichungen:

1) $P + W + Q + R - y = o$

2) $P.AE + W.AG + Q.AN + R.AM - x.y = o$

und hieraus

$$y = P + W + Q + R$$

$$x = \frac{P.AE + W.AG + Q.AN + R.AM}{P + W + Q + R}.$$

§. 89.

Aufgabe. Die Länge $AB = x$ des in A unterſtützten horizontalen prismatiſchen Hebels, Fig. 25. von welchen jeder laufende Fuß p wiegt, der Bedingung gemäß zu beſtimmen, daß die im Endpunct B angebrachte, vertical nach oben wirkende Kraft P mit der in der Entfernung a von der Unterlage, angebrach-

Senkung nur eine gewisse Größe erreichen kann. Diese, d. h. den Ausschlag zu bestimmen.

Auflösung. Der Winkel des Ausschlags sei $= x$; das gesammte in G als vereint anzusehende Gewicht, Q ausgeschlossen $= P$ und Fig. 27. stelle mit denselben Buchstaben, die Lage vor, in welcher nun das System im Gleichgewicht ist, so ergiebt sich sogleich die Bedingungsgleichung nach §. 48.

$$P \cdot CG \operatorname{Sin} x = Q \cdot CB \operatorname{Cos} x; \text{ oder,}$$

$$P \cdot b \operatorname{Sin} x = Q \cdot a \operatorname{Cos} x$$

und hieraus

$$\operatorname{tang} x = \frac{aQ}{bP}.$$

§. 91.

Zusatz. Aus der Gleichung $\operatorname{tang} x = \frac{aQ}{bP}$ folgt:

1) Die Wage ist desto empfindlicher, je größer a, Q und je kleiner b, P sind.

2) Die Vorrichtung dient nicht mehr zum Abwiegen von Lasten, wenn b gleich Null oder negativ ist, denn im ersten Fall, wird, für jedes Q, $x = 90°$; im 2) aber $x > 90°$, und es kann also in beiden Fällen kein Einspielen erfolgen. Der Schwerpunct G des ganzen Systems muß also unterhalb C und zwar so nahe, als möglich bei C, aber nicht in C liegen.

§. 92.

Aufgabe. Eine unbelastete Krämerwage ist im Gleichgewicht, so daß also die Momente der Wageschalen und Arme des Wagebalkens gegenseitig gleich groß sind. Legt man nun in die eine Wageschale eine Last,

deren

deren Gewicht x bestimmt werden soll, in die andere, das fürs Gleichgewicht erforderliche bekannte Gegengewicht P und vertauscht dann beide Kräfte in den Wageschalen, so findet kein Gleichgewicht mehr statt, woraus erhellet, daß die Wage unrichtig ist. Man soll demohngeachtet durch diese falsche Wage x bestimmen.

Auflösung. Der nicht meßbare Hebelsarm von P sei = y, der von x = z, so hat man

1) $P \cdot z = x \cdot z$

Legt man nun x in die Wageschale in welcher P lag, und in die, in welcher x sich befand, das zum Gleichgewicht erforderliche bekannte Gegengewicht Q, so hat man

2) $Qz = x \cdot y$

und das Product beider Gleichungen giebt

$PQ = x^2$; und folglich ist

$x = \sqrt{PQ}$.

Theorie der Schnellwage.

§. 93.

Aufgabe. Es sei AB Fig. 28. die durch die Drehachse C gelegte Länge des horizontalen Wagebalkens; AC = a; CB = b; in A hänge die Wageschale, und ihr Gewicht, nebst dem des Wagebalkens sei = W; der Schwerpunct von W befinde sich in der Entfernung e von A. Wenn nun in die Wageschale eine Last Q gelegt wird, an welcher Stelle D muß ein bleibendes bekanntes Gegengewicht P aufgehängt werden, damit Gleichgewicht statt findet.

Auflösung. Es sei AD = x, so hat man, die

ganze Zahl R wird, und bezeichnet den Endpunct dieſes x auf dem Wagebalken mit g, ſo hat man nur nöthig die Länge fg in R — 1 gleiche Theile fn, nm, mp u. ſ. w. einzutheilen, dann 1 in f; 2 in n; 3 in m u. ſ. w. R in g einzuſchreiben, ſo giebt die Zahl in welcher P fürs Gleichgewicht eingehangen werden muß, die jedesmalige Größe der in der Wagſchale liegenden Laſt.

Von der Stabilität und der Beſtimmung der Stärke der Widerlager.

§. 96.

Aufgabe. Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum von den Abmeſſungen a, b und h ſteht mit der Ebene ab auf einer Horizontalebene, das Gewicht des Parallelepipedums ſei = Q; man ſoll die Stabilität deſſelben in Beziehung auf die, in der Horizontalebene liegende Kante a als Achſe, um welche Beſtreben zu Drehung gedacht wird, beſtimmen.

Auflöſung. Betrachtet man a als Drehungsachſe ſo iſt der Hebelsarm von Q, wenn die ſchwere Materie im Parallelepipedum gleichförmig vertheilt iſt, = $\frac{1}{2}$b; folglich die Stabilität = $\frac{1}{2}$b . Q; oder das Gewicht der Cubiceinheit = p geſetzt, ſo daß alſo Q = abhp iſt, die Stabilität = $\frac{1}{2}$ab²hp.

§. 97.

Aufgabe. Eine zu beiden Seiten lothrechte Mauer von der Breite a, Höhe h und Länge l Fig. 29. hat die erforderliche Stabilität um dem auf ſie wirkenden Erddruck zu widerſtehen. Man ſoll von dem

ſelben Material bei derſelben Länge l und Höhe h die übriger Abmeſſungen einer auf der dem Druck entgegengeſetzten Seite boſſirten Mauer angeben, welche bei $\frac{5}{6}$ des Volumens dieſelbe Stabilität hat.

Auflöſung. Bezeichnet x die Breite der Mauer ſelbſt, y die Ausladung, p das Gewicht der Kubikeinheit der Materie, ſo iſt das Gewicht des Theils von der Breite x, $= hxlp$; der Hebelsarm deſſelben $= y + \frac{x}{2}$; das Gewicht des boſſirten Theils $= \frac{1}{2}lhyp$, ſein Hebelsarm nach §. 72. $= \frac{2}{3}y$, alſo die Stabilität der verlangten Mauer $=$

$$hxlp \cdot \left(y + \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}hyp \cdot \frac{2}{3}y;$$ die, der gegebenen aber $= \frac{1}{2}a \cdot lahp$; und folglich die eine Bedingung

$$hlp\,\frac{2y + x}{2}\,x + \frac{1}{3}lhpy^2 = \frac{1}{2}a^2lhp; \text{ oder:}$$

$$6xy + 3x^2 + 2y^2 = 3a^2$$

Die 2te das Volumen betreffende Bedingung iſt

$hxl + \frac{1}{2}hyl = \frac{5}{6}ahl$ oder

$6x + 3y = 5a$; und hieraus folgt

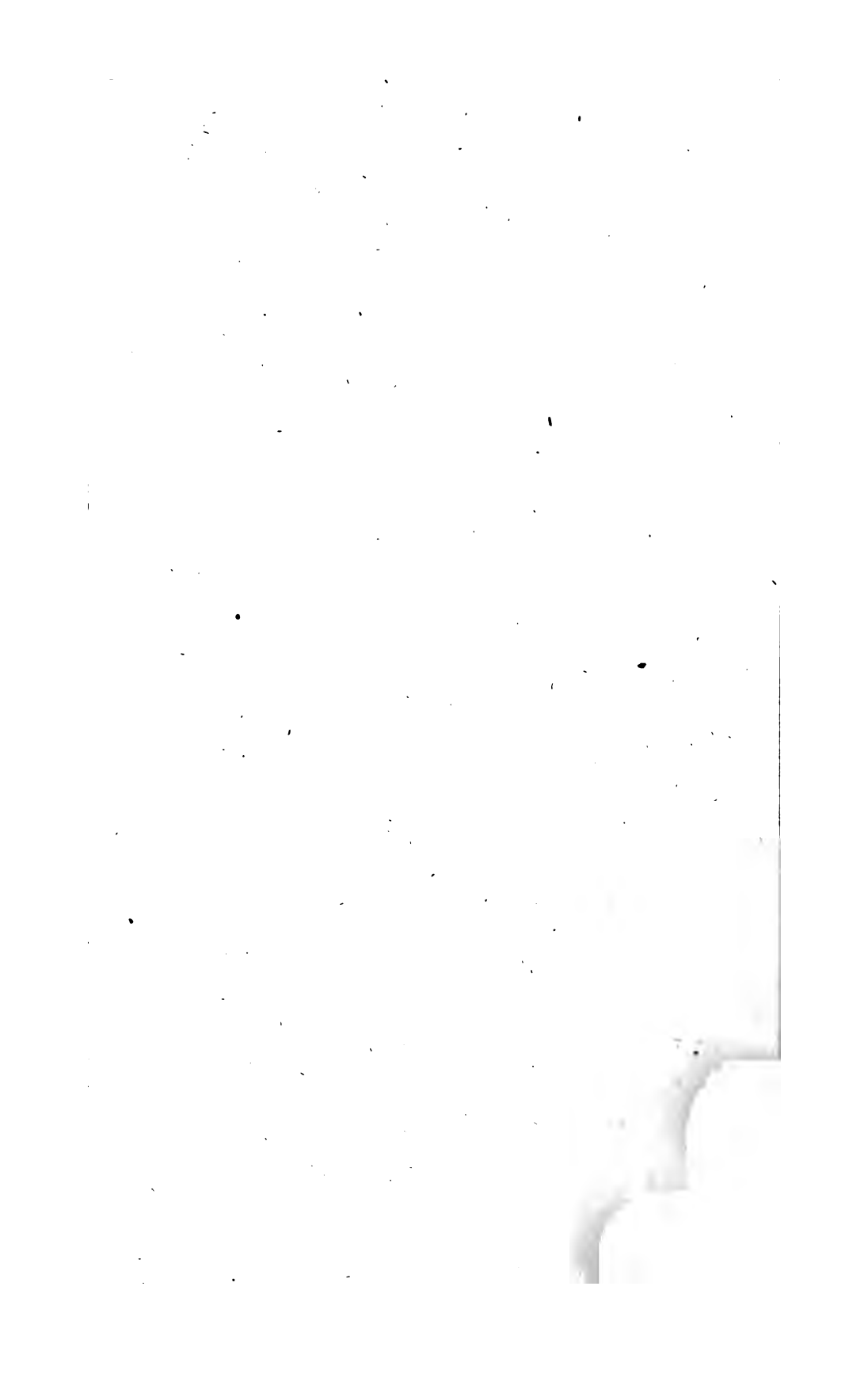
$$y = \frac{5a - 6x}{3}$$

Wird dieſer Werth für y in die erſte Gleichung ſubſtituirt, ſo entſteht

$$2x(5a - 6x) + 3x^2 + 2 \cdot \frac{(5a - 6x)^2}{9} = 3a^2$$

und hieraus

$$x^2 + \frac{10}{3}ax - \frac{23}{9}a^2 = 0; \text{ folglich}$$



$$x = \frac{-5 + \sqrt{48}}{3} a; \text{ und also}$$

$$y = \frac{15 - 2 \cdot \sqrt{48}}{3} \cdot a$$

oder beinahe $x = \frac{2}{3} a$; $y = \frac{1}{3} a$.

§. 98.

Aufgabe. Zwiſchen den beiden in AB und CD gleichmäßig (Fig. 30.) abgeſchrägten, auf einer horizontalen Ebene ſtehenden zu beiden Seiten lothrechten, gleichhohen Mauern, vom lothrechten Querſchnitt ABGFE und CDHNK iſt das ſcheidrechte trapezförmige Gewölbe vom Querſchnitt ABCD eingelaſſen. Die obere Breite AE = CK = x der Widerlager der Bedingung gemäß zu beſtimmen, daß ihre Stabilität mit dem Beſtreben des Körpers ABCD, dieſelben um F und N zu drehen, im Gleichgewicht, ſtehe.

Auflöſung. Denkt man ſich die Stabilität der Widerleger geringer als fürs Gleichgewicht erforderlich iſt, ſo daß eine Drehung um F und N erfolgen würde, ſo ſind B und D die einzigen Berührungsſtellen zwiſchen Kraft und Widerſtand. Zerlegt man daher das Gewicht Q von ABCD in normale Wirkungen p, p auf AB und CD, in B und D thätig; dieſe wieder, der Bequemlichkeit wegen, jede in eine horizontale P und eine verticale R, ſo iſt auf der linken Seite (und eben ſo auch auf der rechten) in Beziehung auf die Umdrehungsachſe durch F; der Hebelsarm von P gleich GB; der von R gleich FG. Wird demnach die Stabilität jedes Widerlagers in Beziehung

auf eben diese Achsen = M gesetzt, so hat man auf einer Seite wie auf der andern, die Bedingungsgleichung:

$$P \cdot GB - R \cdot FG - M = 0.$$

Ist etwa BD = 100; AC = 120; der normale Abstand zwischen AC und BD = 24; BG = DH = 140; also EF = KN = 164; die Tiefe so wie die Materie für Gewölbe und Widerleger dieselbe, so hat man, beide Größen, jede = 1 gesetzt:

$$Q = \frac{100 + 120}{2} \cdot 24 = 220 \cdot 12$$

und weil AB = CD = 26 ist,

$$Q : p = 2 \cdot 10 : 26; \text{ §. 62.}$$

daher $p = 26 \cdot 11 \cdot 12$

Ferner $p : P = 26 : 24$

also $P = 24 \cdot 11 \cdot 12$

und $p : R = 26 : 10$

folglich $R = 110 \cdot 12$

dann GB = 140

FG = x + 10;

das Gewicht jedes Widerlagers

$$= 164 \cdot x + \frac{164 + 140}{2} \cdot 10$$

$$= 164 \cdot x + 304 \cdot 6$$

den zugehörigen Hebelsarm hinreichend genau

$= \frac{x + 10}{2}$; folglich

$$M = (82x + 760)(x + 10)$$

demnach wenn man diese Werthe substituirt

$$24 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 140 - 110 \cdot 12 \cdot (x + 10)$$

$$-(82x + 760)(x + 10) = 0$$

und hieraus $x = 56,2$.

§. 99.

Aufgabe. Die fürs Gleichgewicht erforderliche Stärke der Widerlager bei einem halbkreisförmigen concentrischen Gewölbe zu bestimmen.

Auflösung. Es sei A der Mittelpunct; der Halbmesser $AD = AF = AE = r$; der $AB = AC = \varrho$; die Höhe $CG = BH$ der Widerlager $= h$; die erforderliche Stärke derselben $HI = GK = x$. Man nehme rechts und links des lothrechten Halbmessers AF die gleichen Winkel $FAL = FAN = \alpha$, und betrachte das zum Winkel 2α gehörige Ringstück vom Querschnitt LMPN als den Körper, dessen Gewicht p die Umwerfung der Körper von den Querschnitten LMBHIQD, und NPCGKRE um die normal durch I und K zu denkenden Achsen, zu bewirken strebt. Zu dem Ende zerlege man p in zwei Wirkungen q, q auf LM und NP normal, in M und P angreifend, und jede von ihnen in eine horizontale Thätigkeit V und eine verticale W so ist der Hebelsarm der erstern $IS = h + \varrho \operatorname{Cos}\alpha$; der der letztern $IT = x + \varrho - \varrho \operatorname{Sin}\alpha$. Bezeichnet nun Z das Gewicht des Körpers vom Querschnitt DBML oder ECPN so ist der Hebelsarm von Z, nach §. 77, ($90 - \alpha$ für 2α gesetzt,) h. h.

$$IU = x + \varrho - \frac{120}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{90 - \alpha} \cdot \frac{r^3 - \varrho^3}{r^2 - \varrho^2};$$

endlich, unter y das Gewicht des Widerlagers selbst

verſtanden, der Hebelsarm deſſelben $= \frac{1}{2}x$. In Beziehung auf Beſtreben zu Drehung um I (und auch K), welches aber nicht erfolgen ſoll, hat man alſo die Gleichung;

$$V \cdot IS - VW \cdot IT - Z \cdot IU - Y \cdot \tfrac{1}{2}x = 0.$$

und es iſt, dieſelbe Länge und daſſelbe Material für Gewölbe und Widerlager angenommen

$$p = \frac{2\alpha}{360} \cdot (r^2 - \rho^2)\,\pi$$

folglich nach dem Parallelogram der Kräfte

$$q = \frac{p}{2\,\mathrm{Sin}\,\alpha} = \frac{\alpha\,(r^2 - \rho^2)\,\pi}{360\,\mathrm{Sin}\,\alpha}$$

$$V = q\,\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{\alpha\,(r^2 - \rho^2)\,\pi}{360}\,\mathrm{Cotg}\,\alpha$$

$$W = q\,\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{\alpha\,(r^2 - \rho^2)\,\pi}{360}.$$

dann iſt

$$Z = \frac{90 - \alpha}{360}\,(r^2 - \rho^2)\,\pi\text{; und}$$

$$Y = hx.$$

Setzt man nun, der Kürze wegen $r^2 - \rho^2 = b^2$; $r^3 - \rho^3 = a^3$ und ſubſtituirt alle Werthe in die obige ſtatiſche Gleichung, ſo entſteht, nach gehöriger Ordnung:

$$hx^2 + \tfrac{1}{2}b^2\,\pi x + \tfrac{1}{2}b^2\,\pi\rho$$
$$= \tfrac{2}{3}a^3\,\mathrm{Cos}\,\alpha + \frac{b^2\pi\alpha}{180}\,(\rho\,\mathrm{Cosec}\,\alpha + h\,\mathrm{Cotg}\,\alpha)$$

woraus, für jeden gewählten Werth für α, der zugehörige Werth für x beſtimmt werden kann.

Die höhere Analyſis zeigt aber, daß aus dieſer Gleichung ſich x deſto größer ergiebt, je kleiner man

α wählt, d. h. daß dann die ſtärkſten Widerlager fürs Gleichgewicht erforderlich ſind, wenn eine Trennung in den Fugen beim Schlußſtein erfolgt. Um alſo diejenige Stärke der Widerleger zu erhalten, welche für den nachtheiligſten Fall, noch Gleichgewicht erhalten, muß man α gleich Null ſetzen, und für $\alpha = 0$ iſt, wie ebenfalls durch höhere Analyſis gezeigt werden kann, der Werth, rechts des Gleichheitszeichens

$$= \tfrac{2}{3} a^3 + (\varrho + h)\, b^2.$$

Das größt nöthigſte x liefert daher die Gleichung.

$$h x^2 + \tfrac{1}{2} b^2 \pi x + \tfrac{1}{3} b^2 \pi \varrho = \tfrac{2}{3} a^3 + b^2 (\varrho + h)$$

Beiſpiel. Für $r = 12$; $\varrho = 10$; $h = 10$ erhält man $x = 5{,}45 \ldots$

Drittes Capitel.

Von den Dachverbindungen.

§. 108.

Aufgabe. Der in A horizontal, in B vertical abgeſchrägte, als prismatiſch anzuſehende Körper AB (Fig. 32.) hat das in der Mitte C zwiſchen A und B als vereint anzuſehende Gewicht P, bildet mit dem Horizont den Winkel α, und iſt in A auf einen horizontalen Widerſtand N befeſtigt, in B gegen einen verticalen Widerſtand M gelehnt, und wird ſo in ſeiner Lage erhalten. Man ſoll die aus P entſpringenden horizontalen und verticalen Wirkungen auf dieſe Widerſtandskörper beſtimmen.

Auflösung. Die horizontale Wirkung auf M sei = x, die gegen die Befestigung in N = y; die lothrechte Wirkung auf N = z; so müssen, wenn man die Körper N und M wegnimmt, und dafür die gleichgroßen Gegenwirkungen x, y, z anbringt, die Kräfte P, x, y, z wie sie Fig. 33. darstellt, unter einander Gleichgewicht erhalten. Man hat daher, AC = CB = a gesetzt, ganz wie im Beispiel §. 67. die 3) Gleichungen

1) $x - y = 0$
2) $z - P = 0$
3) $P \cdot a \operatorname{Cos} \alpha = x, 2a \operatorname{Sin} \alpha$

und aus ihnen

$x = y = \frac{1}{2} P \operatorname{Cotg} \alpha$
$z = P.$

§. 101.

Aufgabe. Es wird der Körper N Fig. 32, weggenommen, und dafür, um das Gleichgewicht zu erhalten, ein als prismatisch anzusehender Körper AD vom Gewicht Q angebracht, wie Fig. 34. es anzeigt. Man soll bestimmen, unter welchen Winkel β gegen den Horizont derselben aufgestellt werden muß, und wie groß der horizontale Schub v gegen die in D angebrachte horizontale Unterlage F, und der verticale Druck w auf dieselbe ist.

Auflösung. Es müssen β, v, und w so groß sein, daß die in Fig. 35. angezeigten horizontalen und verticalen Wirkungen $\frac{1}{2}$P Cotg α, v, P, Q, w unter einander Gleichgewicht erhalten. Die Bedingungsgleichungen sind daher

1) $v - \frac{1}{2} P \operatorname{Cotg} \alpha = 0$

2) $P + Q - w = 0$

3) $Q.DK.\operatorname{Cos}\beta + P.DA \operatorname{Cos}\beta - \frac{1}{2} P \operatorname{Cotg} \alpha . DA \operatorname{Sin}\beta = 0.$

und aus ihnen folgt, weil $DK = \frac{1}{2} DA$, gesetzt werden kann,

$$v = \frac{1}{2} P \operatorname{Cotg} \alpha$$

$$w = P + Q$$

$$\operatorname{Cotg}\beta = \frac{P \operatorname{Cotg} \alpha}{Q + 2P}$$

§. 102.

Zusatz. Wird, statt F noch ein dritter prismatischer Körper vom Gewicht R, unter dem Winkel γ gegen den Horizont untergestellt, so erhält man eben so, fürs Gleichgewicht

$$\operatorname{Cotg}\gamma = \frac{P \operatorname{Cotg} \alpha}{R + 2 (P + Q)}.$$

Für einen 4) vom Gewicht T, und den Winkel δ;

$$\operatorname{Cotg}\delta = \frac{P \operatorname{Cotg} \alpha}{T + 2 (P + Q + R)} \text{ u. s. w.}$$

und aus diesen Formeln für $\operatorname{Cotg}\beta$, $\operatorname{Cotg}\gamma$ u. s. w. erhält man sogleich in Beziehung auf die Lage, die allgemeine Bedingungsgleichung

$$\operatorname{tang} \alpha : \operatorname{tang} \beta : \operatorname{tang} \gamma \text{ u. s. w.} =$$

$$P : 2P + Q : 2 (P + Q) + R \text{ u. s. w.}$$

und hieraus, wenn P, Q, R u. s. w. gleich groß sind

$$\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma \text{ u. s. w.} = 1 : 3 : 5 : 7 \text{ u. s. w.}$$

woraus eine leichte Construction abzuleiten ist.

§. 103.

Aufgabe. Ueber der Weite $AC = 2b$; Fig. 36. und Höhe $BD = b$ ein Mansardedach AEDGC aus

zugeben, bei welchem die Sparren AE, ED, DG, GC einerlei Längen und Gewichte haben, und so gestellt sind, daß sich dieselben ohne Kehlbalken, in ihrer Lage erhalten, d. h. daß sich die Tangenten der Winkel α, β gegen den Horizont wie 1 : 3 verhalten.

Auflös. Es sei $DN = x$; $EN = NG = y$; so hat man $\tang\alpha = \frac{x}{y}$ und $\tang\beta = \frac{b-x}{b-y}$; ferner $DE^2 = x^2 + y^2$; $EA^2 = (b-x)^2 + (b-y)^2$; daher die Bedingungsgleichungen

1) $x^2 + y^2 = (b-x)^2 + (b-y)^2$

2) $\frac{x}{y} : \frac{b-x}{b-y} = 1 : 3$

Aus der ersten folgt: $b = x + y$ und aus der zweiten $3bx = by + 2xy$.

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man leicht

$$x = b \cdot \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$y = b \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

dann auch $\tang\alpha = \frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

und $\tang\beta = \frac{y}{x} = \sqrt{3}$.

Es ist aber $\Sin 30° = \frac{1}{2}$; $\Cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

also $\tang 30° = \frac{\Sin 30°}{\Cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und

$\tang 60° = \frac{\Cos 30°}{\Sin 30°} = \sqrt{3}$ folglich

$\alpha = 30°$; $\beta = 60°$ und daher auch $\angle EDN = 60°$.

erhalten. Dieß giebt, $DF = a$; $GH = b$ geſetzt, die Gleichungen:

1) $A + B - z + C - y = o$

2) $x - \frac{1}{2} A \operatorname{Cotg} \alpha = o$

und die Momente in Beziehung auf H genommen

3) $C . \frac{1}{2} b \operatorname{Cos} \beta + (A + B - z) b \operatorname{Cos} \beta - \frac{1}{2} A \operatorname{Cotg} \alpha . a = o$

und aus ihnen erhält man

$$x = \frac{1}{2} A \operatorname{Cotg} \alpha$$

$$y = \frac{1}{2} C - \frac{a A \operatorname{Cotg} \alpha}{2 b \operatorname{Cos} \beta}$$

$$z = A + B - \frac{1}{2} C + \frac{a A \operatorname{Cotg} \alpha}{2 b \operatorname{Cos} \beta}.$$

Viertes Capitel.

Von der gleitenden Reibung, der ſchiefen Ebene, der Schraube und dem Keil.

§. 105.

Erklärung. Wenn ein Körper mit irgend einer ſeiner Begränzungsebenen auf einer andern Ebene liegt, und auf ſie mit einem normalen Druck Q preßt, ſo erzeugt ſich durch das Ineinandergreifen der Erhöhungen und Vertiefungen beider Ebenen ein Widerſtand gegen beabſichtigte Bewegung nach jeder Richtung, und dieſer Widerſtand heißt **der Widerſtand der gleitenden Reibung.** Seine Größe iſt abhängig von der Art der Materie beider Körper, vom Grad der Politur der ſich berührenden Ebenen, auch

II. Für schon bestehende Bewegung.

Reibende Körper.	trocken.	geschmiert.
Eichen auf Eichen	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{15}$
Kiefern auf Kiefern	$\frac{1}{6}$	
Ulmen auf Ulmen	$\frac{1}{10}$	
Eichen auf Kiefern	$\frac{3}{19}$	
Eisen auf Eisen	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{10}$
Kupfer auf Eisen	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{11}$
Eisen auf Eichen	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{15}$
Kupfer auf Eichen	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$

Von der schiefen Ebene.

§. 106.

Aufgabe. Auf einer gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigten Ebene, die den Horizont in einer Linie l schneidet, und deren auf l normalen, verticalen Durchschnitt, die Linie AB Fig. 40. darstellt, in welcher Figur AC horizontal, BC vertical zu denken ist, liegt ein Körper vom Gewicht Q. Man soll das Bestreben p des Körpers nach der Richtung BA herabzugleiten, und das diesem Bestreben entgegenwirkende Reibungshinderniß W bestimmen.

Auflösung. Durch Anwendung des Parallelogramms der Kräfte, entspringt aus Q ein Bestreben nach der Richtung BA welches $= Q \operatorname{Sin} \alpha$ und ein Normaldruck auf BA, welcher $= Q \operatorname{Cos} \alpha$ ist. Man hat daher

$$p = Q \operatorname{Sin} \alpha \text{ und}$$
$$W = \mu Q \operatorname{Cos} \alpha.$$

§. 107.

Soll nun dieß heruntergleiten blos nicht erfolgen, so muß $x \operatorname{Sin}\beta = Q \operatorname{Sin}\alpha - \mu (Q \operatorname{Cos}\alpha + x \operatorname{Cos}\beta)$ sein, und aus dieser Gleichung folgt:

$$x = \frac{\operatorname{Sin}\alpha - \mu \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\beta + \mu \operatorname{Cos}\beta} Q$$

ad. 2) der verlangte Werth für P sei $= y$.

Es muß hier das aus y entspringende Bestreben $y \operatorname{Sin}\beta$ nach der Richtung AB gerade so groß sein, als das ableitende Bestreben, und das Reibungshinderniß, dann wird wenn dieß y um ein Geringes vermehrt wird, Bewegung nach oben erfolgen. Man hat also die Gleichung

$$y \operatorname{Sin}\beta = Q \operatorname{Sin}\alpha + \mu (Q \operatorname{Cos}\alpha + y \operatorname{Cos}\beta)$$

und aus ihr:

$$y = \frac{\operatorname{Sin}\alpha + \mu \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\beta - \mu \operatorname{Cos}\beta} \cdot Q$$

§. 109.

Zusatz. Wird $AB = a$; $BC = h$; $AC = b$ gesetzt, so ist, $\beta = 90°$ angenommen, also die Kraft P parallel mit AB thätig gedacht:

$$x = (\operatorname{Sin}\alpha - \mu \operatorname{Cos}\alpha) Q$$

$$y = (\operatorname{Sin}\alpha + \mu \operatorname{Cos}\alpha) Q$$

oder

$$x = \frac{h - \mu b}{a} \cdot Q.$$

$$y = \frac{h + \mu b}{a} \cdot Q$$

und, wenn keine Reibung statt fände, also $\mu = 0$ wäre

$$x = y = \frac{h}{a} \cdot Q$$

beweglich. Wie groß muß P sein, um bei der geringsten Vergrößerung dieses P eine Erhebung der Last Q zu bewirken, oder: um diese Bewegung, wenn sie schon statt fände, zu erhalten.

Auflösung. Aus Q entspringt eine Normalpressung auf die schiefe Ebene der Schraubenmutter $= Q \operatorname{Cos} \alpha$; aus P aber die $= P \operatorname{Sin} \alpha$, so daß also der Reibungswiderstand

$$= \mu (Q \operatorname{Cos} \alpha + P \operatorname{Sin} \alpha)$$ ist.

Da nun das aus Q entspringende abgleitende Bestreben auf der erwähnten schiefen Ebene $= Q \operatorname{Sin} \alpha$ ist, so müßte also: wenn eine, in der mittleren Peripherie der Spindel angebrachte horizontal und tangential wirkende Kraft x das verlangte Gleichgewicht erhalten sollte:

$$x \operatorname{Cos} \alpha = Q \operatorname{Sin} \alpha + \mu (Q \operatorname{Cos} \alpha + P \operatorname{Sin} \alpha)$$

sein. So groß sich hieraus x ergiebt, so groß ist der horizontal und tangential wirkende Widerstand in der mittleren Peripherie der Spindel, und es muß also P so groß sein wie die Gleichung $PR = xr$ es erfordert. Setzt man die aus beiden Gleichungen für x sich ergebenden Werthe einander gleich so entsteht

$$Q \operatorname{tg} \alpha + \mu [Q + P \operatorname{tg} \alpha] = \frac{PR}{r}$$

und hieraus, da $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2r\pi}$ ist,

$$P = \frac{h + \mu \cdot 2r\pi}{2R\pi - \mu h} \cdot Q$$

§. 112.

Zusatz. Gewöhnlich ist μh gegen $2R\pi$ höchst unbedeutend, und für solche Fälle hat man also

$$P = \left[\frac{h}{2R\pi} + \mu\frac{r}{R}\right] Q$$

Ohne Rücksicht auf Reibung hat man, $\mu = 0$ gesetzt

$$P = \frac{h}{2R\pi} Q;$$

wie auch aus dem Carteſiſchen Grundſatz folgt.

Iſt z. B. $r = 4''$; $h = 1''$; $\mu = \frac{7}{22}$; $R = 112''$; $Q = 2816$ Pfund, ſo erhält man, ohne Rückſicht auf Reibung $P = 4$ Pfund; mit Rückſicht auf Reibung aber $P = 36$ Pfund

Vom Keil.

§. 113.

Aufgabe. Ein dreiſeitiges normales als gewichtlos anzuſehendes Prisma (ein Keil), deſſen mit den Grundebenen parallelen und zugleich verticalen Querſchnitt ABC Fig. 43. vorſtellt, dergeſtalt daß AB (der Rücken des Keils) horizontal, die Mittellinie CD aber, welche mit den Seiten des Keils AC, BC die Winkel α bildet, vertical iſt, wird in D nach lothrechter Richtung von der Gewalt $2P$ angegriffen. An den Seiten AC, BC aber wirken unter den gleichen Winkeln β, β Widerſtände Q; Q; welche die feſten, (als gewichtlos angeſehene) Körper N, M in den Puncten n und m gegen den Keil preſſen. Wie groß muß die Kraft $2P$ fürs Gleichgewicht ſein, d. h. wie groß muß $2P$ ſein, damit die geringſte Vermeh-

rung dieſes 2P, eine Bewegung des Keils nach unten, alſo ein Zurücktreten der Körper M, N zur folge hat.

Auflöſung. Denkt man ſich den Keil, dem Beſtreben von 2P' gemäß um den Weg v fortbewegt, und nun in der Lage A' B' C', ſo daß alſo $AA' = DD' = BB' = CC' = v$ iſt, ſo werden die Widerſtandspuncte n, m, dann ſich in n'; m' befinden, und folglich: wenn 2P den Raum v durchlaufen haben würde, dann jedes Q um den Weg $nn' = mm'$ zurückgedrängt ſein.

Nun wirkt aber auch noch, auf jeder Seite aus dem Normaldruck $Q \operatorname{Sin} \beta$, ein Reibungswiderſtand $\mu Q \operatorname{Sin} \beta$ und dieſer, welcher anfänglich in der Entfernung mB von B ſich äußerte, würde zuletzt nur in der Entfernung m' B' von den jetzt in B' ſich befindenden Punct B thätig ſein, hätte alſo ſeinem widerſtehenden Beſtreben entgegengeſetzt, den Weg $mB - m'B'$ zurückgelegt. Nach dem Prinzip der virtuellen Geſchwindigkeit entſteht daher die Gleichung:

$$2P.v - 2Q.mm' - 2\mu Q \operatorname{Sin}\beta\,(mB - m'B') = 0.$$

Es verhält ſich aber

$$BB' : mm' = \operatorname{Sin}\beta : \operatorname{Sin}\alpha$$

und $BB' : mB - m'B' = \operatorname{Sin}\beta : \operatorname{Sin}(\alpha + \beta)$,

und aus beiden Proportionen folgt

$$mm' = \frac{v \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}\beta};$$

$$mB - m'B' = \frac{v \operatorname{Sin}(\alpha + \beta)}{\operatorname{Sin}\beta}.$$

Setzt man dieſe Werthe in die dargeſtellte Gleichung, ſo hat man

$$2Pv - Q.\frac{v \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}\beta} - 2\mu Q \operatorname{Sin}\beta \frac{v \operatorname{Sin}(\alpha + \beta)}{\operatorname{Sin}\beta} = 0$$

Cylinder nun um ſeine Achſe gedreht werden, ſo widerſetzt ſich dieſer Drehung, die aus dem Normaldruck P entſpringende Reibung μP und dieſer Widerſtand, deſſen Hebelsarm r, deſſen Moment alſo $r\mu P$ iſt, heißt die Zapfenreibung. In ſofern nun bei der gleitenden Reibung, die in einander greifenden Erhöhungen und Vertiefungen abgeſtoßen, bei der Zapfenreibung aber mehr aus einander gehoben werden, ſo iſt bei der Zapfenreibung, μ kleiner als bei der gleitenden. Man kann für Beſtreben zu noch nicht ſtattfindender, drehender Bewegung, im Mittel $\mu = \frac{1}{7}$; bei ſchon ſtatt findender Bewegung aber, $\mu = \frac{1}{8}$ ſetzen.

§. 116.

Aufgabe. Eine Kreisebene vom Halbmeſſer r (etwa die Grundebene eines Wellzapfens) wird normal, mit der Gewalt P auf eine andere Ebene gepreßt. Wenn nun dieſe Kreisebene um ihre Achſe gedreht werden ſoll, wie groß iſt dann das Widerſtandsmoment der Reibung μP?

Auflöſung. Denkt man ſich die Kreisebene $r^2\pi$ durch Halbmeſſer in eine unendliche Menge, unendlich kleiner, als Dreieckchen zu betrachtende Kreisausſchnittchen getheilt, ſo liegt, in Beziehung auf jedes ſolche Ausſchnittchen, der Mittelpunct aller Wirkungen auf $\frac{2}{3}r$ vom Mittelpunct der Kreisebene entfernt, und man kann ſich daher den geſammten Widerſtand μP in der mit $\frac{2}{3}r$ beſchriebenen Peripherie vereint denken. Aus dieſer Anſicht ergiebt ſich der He-

Hebelarm $= \frac{2}{3} r$, also das Widerstandsmoment der Reibung $= \frac{2}{3} r . \mu P$.

§. 117.

Aufgabe. Wenn um einen, um seine Achse beweglichen Cylinder, (Welle) ein Seil vom Durchmesser δ befestigt, und im normalen Querschnitt des Cylinders tangential, auf der einen Seite von einer Gewalt Q angespannt ist, so muß, wenn dieser Cylinder, dem Bestreben von Q entgegengesetzt gedreht wird, das Seil, worauf Q wirkt, sich aufwickeln, und es wird dasselbe vermöge seiner Steifheit, am Cylinder, wo es aus der geradlinigten Richtung sich in die Peripherie begeben muß, ein Knie bilden, wodurch der Hebelsarm von Q vergrößert wird; man soll diesen Hebelsarm bestimmen.

Auflösung. Der Halbmesser des Cylinders, von seiner Achse bis in die centrische Linie des anliegenden Seils gemessen, sei $= r$; die Vergrößerung des Hebelsarms wegen des entstehenden Knies $= x$, also der Hebelsarm von Q $= r + x$; so wird x desto größer sein, je mehr Fäden das Seil zählt, d. h. je größer sein Querschnitt ist. Gehören nun δ' und x' eben so zusammen, wie δ und x, so hat man

$$x : x' = \tfrac{1}{4}\delta^2 \pi : \tfrac{1}{4}\delta'^2 . \pi$$

und hieraus ist

$$x = \frac{x'}{\delta'^2} . \delta^2,$$

Versteht man alle Längen in Zollen, so ist nach Versuchen $\frac{x'}{\delta'^2}$ im Mittel $= \frac{1}{2}$ zu setzen, so daß also

$$x = \tfrac{1}{2}\delta^2$$

folglich der Hebelsarm von Q,

$$= r + \tfrac{1}{2}\delta^2$$

also das Moment von Q, $= (r + \tfrac{1}{2}\delta^2) \cdot Q$ angenommen werden kann.

Anmerk. Wirkt Q nicht an einem Seil, sondern an einer Kette und bezeichnet d die Dicke der Kettenschacken, so kann man im Mittel den Hebelsarm $= r + \frac{1}{4}d$ setzen.

§. 118.

Aufgabe. Eine horizontal liegende Welle vom Halbmesser r ruht mit ihren beiden Zapfen vom Halbmesser ϱ auf Zapfenlagern; an der Welle ist normal auf ihre Achse ein Rad vom Halbmesser R angebracht, wie es Fig. 44. im Durchschnitt, normal auf die Achse dargestellt. Das Gewicht der Zapfen, Welle und des Rades sei $= W$; wenn nun an der Peripherie der Welle irgendwo tangential ein Widerstand Q; an der Peripherie des Rades aber irgendwo, tangential entgegen eine Kraft P wirkt, und beide Richtungslinien mit der durch die Achse gelegten im normalen Querschnitt befindlichen, Horizontallinie ab die Winkel α und β bilden, wie groß muß dann P sein, um bei der geringsten Vergrößerung, eine Drehung um die Achse, seinem Bestreben gemäß, hervorzubringen?

Auflösung. Aus P und Q entspringt die horizontale Wirkung $P \operatorname{Cos}\beta + Q \operatorname{Cos}\alpha$ und die verticale $P \operatorname{Sin}\beta + Q \operatorname{Sin}\alpha$; addirt man zu letzterer noch W, so entspringt die Pressung der Zapfen auf ihre Zapfenlager aus der lothrechten Thätigkeit

$$P \operatorname{Sin}\beta + Q \operatorname{Sin}\alpha + W$$

und aus der horizontalen

$$P \operatorname{Cos}\beta + Q \operatorname{Cos}\alpha;$$

der mittlere Normaldruck ist also

$$= \sqrt{(P \operatorname{Sin}\beta + Q \operatorname{Sin}\alpha + W)^2 + (P \operatorname{Cos}\beta + Q \operatorname{Cos}\alpha)^2}$$

welcher D heißen soll.

Aus D entsteht eine Reibung $= \mu D$ am Hebelsarm ϱ. und man hat daher die Gleichung

$$PR = Qr + \varrho . \mu D$$

oder: wenn Q an einem Seil vom Durchmesser δ wirkt, alle Längen in Zollen verstanden

$$PR = Q(r + \tfrac{1}{2}\delta^2) + \varrho\mu D;$$

aus welcher Gleichung P entwickelt werden kann.

§. 119.

Zusatz. Die Entwicklung von P führt auf eine unbequeme unreine quadratische Gleichung, und um diese zu vermeiden, kann man häufig die horizontale, Reibung erzeugende Wirkung $P \operatorname{Cos}\beta + Q \operatorname{Cos}\alpha$ außer Betracht lassen. Dann hat man blos die Gleichung:

$$PR = Q(r + \tfrac{1}{2}\delta^2) + \varrho\mu(P \operatorname{Sin}\beta + Q \operatorname{Sin}\alpha + W)$$

und hieraus

$$P = \frac{(r + \frac{1}{2}\delta^2 + \varrho\mu \operatorname{Sin}\alpha)\, Q + \varrho\mu W}{R - \varrho\mu \operatorname{Sin}\beta}$$

§. 120.

Zusatz. Ist $\alpha = 90°$ und $\beta = 90°$, so findet keine horizontale Wirkung statt, und es ist vollkommen

$$P = \frac{(r + \frac{1}{2}\delta^2 + \varrho\mu)\, Q + \varrho\mu W}{R - \varrho\mu}$$

§. 121.

Beispiel. In einem Laufrad, dessen Halbmesser = 16 Fuß ist, wirkt, unter einem Winkel von 20 Grad gegen den Horizont (Fig. 45.) ein Gewicht von 600 Pfd.; das Gewicht der Welle mit den Zapfen und des Rades sei = 3000 Pfund; die Halbmesser der Zapfen = 2″; wenn nun an der Peripherie der Welle von 18″ Halbmesser, an einem Seil von 1 Zoll Durchmesser eine Last Q lothrecht herab, dem Bestreben des Gewichts von 600 Pfund entgegen, wirkt; wie groß darf dann Q seyn, damit die 600 Pfund mit Q und der Reibung im Gleichgewicht sind, so daß die geringste Vergrößerung des Moments der 600 Pfund eine Erhebung von Q zur Folge haben muß?

Es entspringt die Reibung in den Zapfenlagern aus dem lothrechten Druck

$$600 + 3000 + Q \text{ oder } 3600 + Q;$$

folglich ist, $\mu = \frac{1}{7}$ gesetzt, der Reibungswiderstand $= \frac{1}{7}(3600 + Q)$ und sein Moment in Beziehung auf die Drehachse.

$$= 2 \cdot \frac{1}{7}(3600 + Q);$$

ferner ist: das Moment des Widerstandes $Q =$

$$(18 + \tfrac{1}{2} \cdot 1^2) \cdot Q;$$ und das der Kraft

$$= 600 \cdot ab = 600 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \text{Sin } 20° = 39400,$$

Man hat also die Gleichung

$$39400 = 18{,}5\ Q + \tfrac{2}{7}(3600 + Q)$$

und hieraus $Q = 2042$ Pfund

Anmerk. Wird nun, nachdem die 2042 Pfund angehängt sind, das lebende Geschöpf, dessen Gewicht 600 Pfund ist, im er-

sten Augenblick nur um einen Schritt höher getrieben, so wird das Kraftmoment größer als es das Gleichgewicht erfordert, es erfolgt also Bewegung und somit Erhebung der Last, und hat diese Bewegung begonnen, so tritt dann, wenn auch das Geschöpf in dem anfänglichen Punkt zurücktritt, ein Gleichgewicht der Kräfte, während der Bewegung, also ein Beharrungsstand ein.

§. 122.

Aufgabe. Für mehrere in einander greifende Räder, die Gleichungen zwischen Kraft P, und Last Q, fürs Gleichgewicht darzustellen. Fig. 46.

Auflösung. Ist für I; R der Halbmesser des Stirnrades; r der der Welle; ϱ der der Zapfen, W das Gewicht von Rad, Welle und Zapfen; δ der Durchmesser des Seils woran Q hängt, x die Kraft, welche fürs Gleichgewicht den Kamm des Stirnrades ergreifen muß, so hat man

$$xR = Q\,(r + \tfrac{1}{2}\delta^2) + \varrho.\mu.(Q + W + x)$$

woraus sich x ergiebt.

Wird nun die Reibung zwischen Kamm und Triebstock im Mittel $\frac{1}{12}$ des Drucks gesetzt, so hat man die im Triebstock von II. erforderliche, hervorzubringende Thätigkeit $y = x + \frac{1}{12}x$.

Wenn nun in Beziehung auf II; R'; r'; ϱ'; w'; x'; y'; dieselbe Bedeutung haben, wie R, r, ϱ, w, x, y, in Beziehung auf I., so hat man

$$x'.R' = y'.r' + \varrho'\mu\,(\pm W' \mp x' \mp x)$$

je nachdem $W' > x' + x$ oder $x' + x > W'$ ist; und aus dieser Gleichung kann man x' bestimmen. Ist x' gefunden, so hat man dann

$$y' = x' + \tfrac{1}{12}x'.$$

Haben nun in Beziehung auf III.; R''; r''; ϱ''; W'' die vorige Bedeutung, so ist endlich

$$PR'' = y' \cdot r'' + \varrho' \mu (P + x' + W'')$$

woraus P zu bestimmen ist.

Sechstes Capitel.

Von der festen und losen Rolle, den Rollen und den Flaschenzügen.

---

§. 123.

Aufgabe. Eine materielle Kreisscheibe, welche keine andere als drehende Bewegung um ihre horizontale Achse vornehmen kann, d. h. eine feste Rolle, wird vermittelst eines umgelegten Seils, von einer Kraft P und Last Q tangential ergriffen. Wie groß muß P sein, um mit Q, der Steifheit des Seils, und der Reibung Gleichgewicht zu erhalten?

Auflösung. Bezeichnet r die Entfernung von der Achse bis zur centrischen Linie des Seils; ϱ den Halbmesser der Zapfen, δ den Durchmesser des Seils, W das Gewicht der Rolle nebst Zapfen, α, β die Winkel, welche die Richtungen von Q und P mit der horizontalen Linie bilden (Fig. 47.) so ist ganz nach §. 119; r, ϱ und δ in Zollen verstanden,

$$Pr = Q\,(r + \tfrac{1}{2}\delta^2) + \varrho\mu(P \operatorname{Sin}\beta + Q \operatorname{Sin}\alpha + W)$$

woraus sich P ergiebt.

§. 124.

Zuſatz. In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung iſt $\alpha = 90°$; $\beta = 90°$ und W unbedeutend. Für ſolche Fälle hat man daher

$$Pr = Q(r + \tfrac{1}{2}\delta^2) + \varrho\mu\,(P + Q);$$ und hieraus

$$P = \frac{r + \frac{1}{2}\delta^2 + \varrho\mu}{r - \varrho\mu}\,Q$$

oder $\frac{r + \frac{1}{2}\delta^2 + \mu\varrho}{r - \mu\varrho}$ durch a ausgedrückt,

$$P = a.\,Q$$

§. 125.

Aufgabe. Zu einer Verticalebene Fig. 48. befindet ſich eine materielle Kreisſcheibe, an deren horizontalen Achſe, um die Zapfen, vermittelſt einer Hülſe, eine Laſt Q lothrecht herabhängt. Wenn nun, um dieſe Kreisſcheibe, welche ſowohl fortgehende als drehende Bewegung um ihre Achſe annehmen kann, alſo eine loſe Rolle bildet, in derſelben Verticalebene ein Seil vom Durchmeſſer δ gelegt iſt, welches an der einen Seite unter dem Winkel α mit der Horizontale aufgehangen wird, wie groß muß dann die Spannkraft S dieſes befeſtigten Seilſtücks, die Kraft P am andern Seilende, und der Winkel β ihrer Richtung mit dem Horizont ſein, damit die geringſte Vergrößerung von P eine drehende und zugleich erhebende Bewegung hervorbringt?

Auflöſung. Bezeichnet r den Halbmeſſer der Rolle bis zur centriſchen Linie des umliegenden Seils; ϱ den der Zapfen; W das Gewicht der Rolle und des

Seils, so ist, in Beziehung auf die Achse, das Widerstandsmoment der Reibung $= \varrho \mu Q$, folglich nach dem dritten Kapitel des Systems der Statik

1) $P \operatorname{Sin} \beta + S \operatorname{Sin} \alpha = Q + W$

2) $P \operatorname{Cos} \beta + S \operatorname{Cos} \alpha = 0$

3) $Pr = S \cdot (r + \frac{1}{2}\delta^2) + \varrho \mu Q$

aus welchen 3 Gleichungen, P, S und β zu bestimmen sind.

§. 126.

Zusatz. In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung ist $\alpha = 90^\circ$; W aber unbedeutend, also außer Betracht zu lassen. Für solche Fälle hat man daher

1) $P \operatorname{Sin} \beta + S = Q$

2) $P \operatorname{Cos} \beta = 0$

3) $Pr = S \cdot (r + \frac{1}{2}\delta^2) + \varrho \mu Q$

und hieraus

$\beta = 90^\circ$;

$P = \frac{r + \frac{1}{2}\delta^2 + \mu\varrho}{2r + \frac{1}{2}\delta^2} \cdot Q$

$S = \frac{r - \mu\varrho}{2r + \frac{1}{2}\delta^2} \cdot Q$

oder, $\frac{r + \frac{1}{2}\delta^2 + \mu\varrho}{2r + \frac{1}{2}\delta^2}$ durch b

und $\frac{r - \mu\varrho}{2r + \frac{1}{2}\delta^2}$ durch c ausgedrückt,

$P = b \cdot Q$

$S = c \cdot Q$.

§. 127.

Aufgabe. Es bilden n lose und eine feste Rolle einen Rollenzug, wie ihn Fig. 49. andeutet. Es soll die

Anſpannungen der Seile, gleichen Kräfte, wie ſie in der Figur angezeigt ſind, ſo hat man nach §. 124. und §. 126., wenn w, p, q die aus Q entſpringenden Preſſungen auf die Bolzen der beweglichen Flaſche ausdrücken:

1) $f = b \cdot w$
2) $g = a \cdot f$
3) $g = c \cdot p$
4) $h = b \cdot p$
5) $k = a \cdot h$
6) $k = c \cdot q$
7) $m = b \cdot q$
8) $P = a \cdot m$
9) $w + p + q = Q$

Aus 1) 2) 3 erhält man

$$abw = cp$$

Aus 4) 5) 6 aber

$$abp = cq$$ und

aus 7) und 8)

$$P = abq.$$

Aus dieſen 3 Gleichungen

$$P = abq$$
$$adp = cq$$
$$abw = cp$$

ergiebt ſich aber

$$q = \frac{P}{ab}$$

$$p = \frac{cP}{a^2b^2}$$

$$w = \frac{c^2P}{a^3b^3}$$

Siebentes Capitel.

Von der Festigkeit parallelepipedischer Körper.

§. 130.

Erklärung. Den Widerstand, welchen ein Körper dem Bestreben, seine Theile zu trennen, entgegengesetzt, nennt man seine **Festigkeit**. Die, dem Zerreißen entgegenwirkende heißt: die **absolute**; die dem Zerbrechen widerstrebende, die **relative**; die dem Zerquetschen oder Zerdrücken widerstehende, die **rückwirkende Festigkeit**.

§. 131.

Aufgabe. Das Verhältniß der absoluten Festigkeiten zweier normalen Parallelepipeden von einerlei Materie, zu bestimmen.

Auflösung. Hat das eine Parallelepipedum die Abmessungen: B, H, L, das andere die: b, h, l und wirken die Kräfte P, p welche mit den absoluten Festigkeiten im Gleichgewicht stehen, nach den Richtungen L, l, so müssen sich diese Kräfte P, p wie die Menge der zu zerreißenden Theile der Materien, d. h. wie die auf L, l normalen Querschnitte verhalten. Man hat also $P : p = BH : bh$

§. 132.

Zusatz. Aus §. 131. folgt:

$$p = \frac{P}{BH} \cdot bh.$$

Iſt nun durch Verſuche $\frac{P}{BH}$ für dieſe Materie bekannt, etwa $= k$, ſo hat man

$$p = k \cdot bh$$

Verſteht man b und h in Zollen, p in Pfunden, ſo iſt im Mittel:

für Bley $k = 900$
„ Eiſen $k = 70000$
„ Kupfer $k = 30000$
„ Stahl $k = 110000$
„ Büchen, Eichen, Erlen, Eſchenholz $k = 12000$
„ Fichten, Kiefern, $k = 10000$.

§. 133.

Aufgabe. Das Verhältniß der relativen Feſtigkeiten zweier normalen Parallelepipeden von einerlei Materie zu beſtimmen.

Auflöſung. Bezeichnet in Beziehung auf das eine Parallelepipedum B die Breite, H die Höhe, L die Länge, W das Gewicht, P die abſolute, R die relative Feſtigkeit, ſo wird, wenn man ſich dies Parallelepipeden ſo eingemauert denkt, daß es mit der Länge L, horizontal hervorragt, B ebenfalls horizontal, H aber vertical liegt, die Breite B an der Stelle wo die Mauer aufhört, als Drehungsachſe in Beziehung auf das Beſtreben zum Zerbrechen erſcheinen. Wirkt nun an dem Endpuncte von L, das Gewicht G ſo hat dieſes den Hebelsarm L, W aber dann $\frac{1}{2}$L. Da nun die entgegenwirkende abſolute Feſtigkeit P an den He-

beſtarm $\frac{1}{2}$H wirkt, ſo hat man alſo für den Augenblick vor dem Bruch

$$G \cdot L + W \cdot \tfrac{1}{2} L = P \cdot \tfrac{1}{2} H$$

und hieraus

$$G + \tfrac{1}{2} W = \frac{PH}{2L},$$

oder, in ſofern $G + \frac{1}{2} W$ die relative Feſtigkeit, oder die Kraft zum Zerbrechen, ausdrückt,

$$R = \frac{PH}{2L}.$$

Wenn nun b, h, l, p, r in Beziehung auf das andere Parallelipedum dieſelbe Bedeutung haben, ſo hat man auch

$$r = \frac{ph}{2l}$$

und folglich

$$R : r = \frac{PH}{L} : \frac{ph}{l}$$

oder, nach §. 131.

$$R : r = \frac{BH^2}{L} : \frac{bh^2}{l}.$$

§. 134.

Zuſatz. Aus der Proportion

$$R : r = \frac{B \cdot H^2}{L} : \frac{bh^2}{l}$$

folgt:

$$r = \frac{R \cdot L}{B \cdot H^2} \cdot \frac{bh^2}{l}$$

Iſt nun durch Verſuche $\frac{RL}{BH^2}$ für dieſe Materie bekannt, etwa $= n$, ſo hat man

$$r = n \cdot \frac{bh^2}{l}.$$

Verſteht man b, h und l in Zollen, r aber in Pfunden, ſo iſt, im Mittel:

für Kiefernholz $n = 2800$
„ Eichen $n = 4000$
„ Rothtannen $n = 2000$
„ Weißtannen $n = 2700$
„ Rothbüchen $n = 4700$
„ Weißbüchen $n = 3000$
„ Erlen $n = 3400$.

Iſt Ausdauer auf lange Zeit gemeint, ſo kann man nach Eytelweins Angaben nur den 3ten Theil annehmen.

§. 135.

Aufgabe. Ein normales Parallelepipedum von den Abmeſſungen b, h, l liegt ſo daß b und l horizontal ſind, und iſt in den beiden Endpuncten von l durch Unterlagen unterſtützt. In der Entfernung x von der einen Unterlage wirkt lothrecht auf den Balken ein Gewicht y; man ſoll eine Gleichung zwiſchen x und y darſtellen, welche die Bedingung ausſpricht, daß y mit der relativen Feſtigkeit, Gleichgewicht erhält.

Auflöſung. Aus y entſpringt nach §. 87. auf die eine Unterlage ein Druck $\frac{(l-x)y}{l}$ und da die gleich große Gegenwirkung dieſer Unterlage mit der relativen Feſtigkeit in der Brechungsebene bei y im Gleichgewicht ſein ſoll, ſo hat man alſo $\frac{(l-x)y}{l} = n \cdot \frac{b.h^2}{x}$, und hieraus $y = \frac{nbh^2l}{lx - x^2}$ welches die verlangte Gleichung iſt.

Verſteht man b, h und l in Zollen, r aber in Pfunden, ſo iſt, im Mittel:

für Kiefernholz $n = 2800$
„ Eichen $n = 4000$
„ Rothtannen $n = 2000$
„ Weißtannen $n = 2700$
„ Rothbüchen $n = 4700$
„ Weißbüchen $n = 3000$
„ Erlen $n = 3400$.

Iſt Ausdauer auf lange Zeit gemeint, ſo kann man nach Eytelweins Angaben nur den 3ten Theil annehmen.

§. 135.

Aufgabe. Ein normales Parallelepipedum von den Abmeſſungen b, h, l liegt ſo daß b und l horizontal ſind, und iſt in den beiden Endpuncten von l durch Unterlagen unterſtützt. In der Entfernung x von der einen Unterlage wirkt lothrecht auf den Balken ein Gewicht y; man ſoll eine Gleichung zwiſchen x und y darſtellen, welche die Bedingung ausſpricht, daß y mit der relativen Feſtigkeit, Gleichgewicht erhält.

Auflöſung. Aus y entſpringt nach §. 87. auf die eine Unterlage ein Druck $\frac{(l-x)y}{l}$ und da die gleich große Gegenwirkung dieſer Unterlage mit der relativen Feſtigkeit in der Brechungsebene bei y im Gleichgewicht ſein ſoll, ſo hat man alſo $\frac{(l-x)y}{l} = n \cdot \frac{b.h^2}{x}$, und hieraus $y = \frac{nbh^2l}{lx - x^2}$ welches die verlangte Gleichung iſt.

Für $x = \frac{1}{2}l$, entſteht $y = 4n \cdot \frac{bh^2}{l}$

oder nach §. 134. $y = 4 \cdot r$.

§. 136.

Zuſatz. Die Differenzialrechnung lehrt, daß man aus einem Cylinder den ſtärkſten parallelepipediſchen Balken erhält, wenn man den Durchmeſſer der Grundebene in 3 gleiche Theile theilt, in den beiden Theilpuncten Normalen auf den Durchmeſſer ſtellt, die eine auf der einen, die andere auf der andern Seite des Durchmeſſers, und beide dann bis zur Peripherie verlängert. Dieſe beiden Puncte und die Endpuncte des Durchmeſſers geben dann die 4 Ecken der Grundebene des Parallelepipedums, die größere Seite wird h; die kleinere b.

Aus dieſer Conſtruction folgt dann leicht

$h : b = \sqrt{2} : 1$; oder beinahe

$h : b = 7 : 5$

Beiſpiel. Für einen Balken von 10″ Breite und 10″ Höhe einen andern von derſelben Materie anzugeben, der bei eben der Länge, dieſelbe relative Feſtigkeit hat, aber aus einem Cylinder aufs vortheilhafteſte beſchlagen werden ſoll.

Bezeichnet b die geſuchte Breite, h die geſuchte Höhe, ſo hat man die Gleichungen:

$10 \cdot 10^2 = b \cdot h^2$ und

$h : b = \sqrt{2} : 1$;

und aus ihnen

$b = \sqrt[3]{600} = 7{,}937$ Zoll

$h = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{600} = 11{,}224$ Zoll

folglich den Durchmeſſer des erforderlichen Baumſtamms $= \sqrt{b^2 + h^2} = 13{,}747$ Zoll.

§. 137.

Aufgabe. Das Verhältniß der rückwirkenden Feſtigkeiten zweier normalen, lothrecht ſtehenden Parallelepipeden anzugeben.

Auflöſung. Bezeichnen L, l ihre lothrecht ſtehenden Längen; B, ~~b die größeren~~, H, h die kleineren Seiten ihrer horizontalen Querſchnitte; Q, q ihre rückwirkenden Feſtigkeiten, ſo ſoll nach Erfahrungen folgende Proportion ſtatt finden

$$Q : q = \frac{BH^2}{L^2} : \frac{bh^2}{l^2}.$$

§. 138.

Zuſatz. Man kann alſo $Q = m \cdot \frac{bh^2}{l^2}$ ſetzen.

Beziehen ſich b, h, l auf Zolle, q auf Pfunde, ſo iſt im Mittel

für Kiefernholz $m = 1550000$

für Eichenholz $m = 1965000$

Für die Ausdauer kann man aber auch nur den 32ſten Theil nehmen.

Dritte Abtheilung.

Die Hydroſtatik oder: Anwendungen der ſtatiſchen Geſetze auf das Gleichgewicht tropfbar flüſſiger Körper unter ſich und mit feſten Körpern.

Erſtes Capitel.

Vom Normaldruck tropfbar flüſſiger Materien auf begränzende feſte Wände.

§. 139.

Erklärung.

Eine Materie heißt flüſſig, wenn ihre Theile einen ſo geringen Zuſammenhang unter einander haben, daß dieſe Materie nur dann eine beſtimmte Form annehmen kann, wenn ſie von feſten Wänden begränzt iſt.

Einige Flüſſigkeiten ſind äußerſt compreſſibel, wie die Luft, Waſſerdämpfe u. ſ. w. andere, die tropfbar flüſſigen ſind beinahe gar nicht compreſſibel, wie z. B. das Waſſer. Mit jenen beſchäftige ſich die Pneumatik, mit dieſen (und zwar hier ins beſondere mit dem Waſſer) die Hydroſtatik.

§. 140.

Erfahrung. Die Oberfläche einer von festen Seitenwändern eingeschlossenen, ruhenden, tropfbar flüssigen Materie ist horizontal.

§. 141.

Aufgabe. In einem oben offenen Gefäß befindet sich Wasser; man soll den Normaldruck des Wassers auf jedes ebene Stück der begränzenden Wand bestimmen.

Auflösung. 1) Für ein unendliches kleines ebenes Stückchen vom Quadratinhalt = a.

Man denke sich a ausgeschnitten und durch eine normale Thätigkeit x in seiner Lage erhalten, so daß also x dem zu bestimmenden Normaldruck gleich ist.

In Fig. 51. sei p die Stelle von a; nm der Wasserspiegel. Durch p stelle man sich eine horizontale Ebene pq vor, deren Quadratinhalt innerhalb des Gefäßes = B sein mag; denke sich den verticalen Abstand h zwischen pq und nm, von unten herauf, in eine sehr große Anzahl Theile von den Größen b, c, d u. s. w. abgetheilt, so gewählt, daß wenn C, D u. s. w. die den Endpuncten von b, c u. s. w. zugehörigen horizontalen Querschnitte des Gefäßes bezeichnen, die durch Bb, Cc, Dd, u. s. w. auszudrückenden Cubicinhalte der aufeinander liegenden horizontalen Wasserschichten gleich groß sind.

Wird nun das Wasser als vollkommen incompressibel betrachtet, so mußte, wenn die Kraft x die Ebene a um den Weg v in das Gefäß hineinpreßte, und v

ſo groß gedacht wird, daß $av = Bb = Cc$ u. ſ. w. iſt, die Schicht Bb in den Raum Cc die Cc in den Dd u. ſ. w. ſteigen. Es ſind daher die dem Eindringen von a widerſtehenden Gewichte der aufeinander liegenden Waſſerprismen, wenn γ das Gewicht eines Cubicfußes Waſſer ausdrückt, und alle Abmeſſungen in Fußen verſtanden werden,

$= Bb\gamma$, $Cc\gamma$, $Dd\gamma$ u. ſ. w.

und die Wege, welche dieſe Kräfte ihren Beſtreben entgegen, dann durchlaufen müßten, wenn die Kraft x den Weg v zurücklegte $= b, c, d$ u. ſ. w., und man hat daher nach dem Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten, die Gleichung

$$xv = Bb\gamma . b + Cc\gamma . c + Dd\gamma . d \text{ u. ſ. w.}$$

weil aber

$$av = Bb = Cc = Dd \text{ u. ſ. w.}$$

iſt, ſo entſteht durch Subſtitution

$$xv = av\gamma b + av\gamma c + av\gamma . d + \text{u. ſ. w.}$$

oder

$$x = a\gamma (b + c + d \text{ u. ſ. w.})$$

Es iſt aber $b + c + d$ u. ſ. w. $= h$

folglich $x = ah\gamma$

d. h. der Normaldruck des Waſſers auf das Element a, iſt ſo groß wie das Gewicht eines Waſſerprismens, welches a zur Grundebene, und die Entfernung h, von a bis zum Waſſerſpiegel zur Höhe hat.

2) Für jede Ebene E der Begränzung.

Es bezeichne H die lothrechte Entfernung vom

Man hat nach §. 141.

$$x = A h \gamma$$

II. Wenn die Oberfläche des Waſſers in I noch von einer Gewalt P lothrecht nieder gedrückt wird, wie groß muß dann x fürs Gleichgewicht ſein?

Enthält die Oberfläche in I a Quadratfuße, ſo iſt die Höhe einer Waſſerſäule über a, deren Druck auf a ſo groß wie P iſt, gleich $\frac{P}{a\gamma}$ folglich

$$x = A \left(h + \frac{P}{a\gamma} \right) \cdot \gamma; \text{ oder}$$

$$x = A h \gamma + \frac{A}{a} P.$$

III. Ein verticales Schußbrett von 4′ horizontaler Breite und 3′ Höhe, deſſen Schwerpunct vom Waſſerſpiegel 5′ entfernt iſt, ſoll durch eine lothrecht nach oben wirkende Thätigkeit x in die Höhe gezogen werden. Wie groß muß x fürs Gleichgewicht ſein?

Der Normaldruck des Waſſers iſt, $\gamma = 66$ Pfund geſetzt; $= 3 . 4 . 5 . 66$

und x muß mit der aus dieſen Druck entſtehenden Reibung Gleichgewicht halten. Setzt man daher $\mu = \frac{1}{3}$ ſo hat man

$x = \frac{1}{3} . 3 . 4 . 5 . 66 = 1320$ Pfund.

Iſt ein Hebel angebracht, und wirkt der Widerſtand von 1320 Pfund an einen Hebelsarm von 18″; die Kraft P aber an 8′ Hebelsarm, ſo iſt $P . 96 = 18 . 1320$ folglich $P = 247\frac{1}{2}$ Pfund.

IV. Eine Schleuſenkammer ſo weit mit Waſſer anzufüllen, daß beide Thore gleichen Druck erleiden.

ist mit seiner ganzen Ebene dem Druck eines eben so hoch stehenden Wassers ausgesetzt. Man soll das Moment M, dieses Drucks P, in Beziehung auf die untere Breite b bestimmen.

Auflösung. Auf irgend einen horizontalen Streifen von der unendlich kleinen Höhe e, in g, Fig. 54. gedacht, wirkt ein Normaldruck $D = b.e.fg.\gamma$.

Auf eben solch einen Streifen in k wirkt der Druck $D' = b.e.fk.\gamma$ und es verhält sich also

$$D : D' = fg : fk$$

Macht man daher die Horizontallinie $gn = D$ (in dem Sinn §. 52. Anmerk.), und zieht durch f und n die gerade Linie ft bis sie die Horizontale durch den tiefsten Punct r, schneidet, so wird jede mit gn, im Δfrt, parallel gezogene Linie, den Druck auf den zugehörigen Streifen in bh, darstellen. Der Mittelpunct aller dieser Wirkungen liegt daher im Schwerpunct q des Dreiecks frt, und es ist daher, wenn man durch q eine Horizontale zieht, welche $fr = h$ in m schneidet, $rm = \frac{1}{3}h$ (§. 72) der Hebelsarm des Normaldrucks

$P = bh.\frac{1}{2}h.\gamma$; folglich

$M = \frac{1}{3}h.bh.h\gamma$ oder

$M = \frac{1}{6}bh^2\gamma$

wo $\gamma = 66$ Pfund, b und h aber in Fußen zu verstehen sind.

§. 145.

Aufgabe. Eine zu beiden Seiten lothrechte Mauer bildet ein Parallelepipedum, von der Breite b, Höhe

Höhe h und Länge l wie es Fig. 55. im verticalen Querſchnitt darſtellt. Die Seite hl deſſelben iſt dem Druck eines eben ſo hoch ſtehenden Waſſers ausgeſetzt. Wenn nun der Cubikfuß Mauer p Pfund wiegt, ſo wird gefragt, wie groß b werden muß, damit die Stabilität der Mauer den Druck des Waſſers gerade aushalten kann.

Auflöſung. Die Stabilität der Mauer iſt in Beziehung auf die Kante l durch a, um welche der Druck des Waſſers die Mauer umzuwerfen ſtrebt

$$= blp \cdot \tfrac{1}{2}b.$$

Das Moment des Waſſerdrucks aber $= \frac{1}{6} lh^3 \cdot \gamma$; folglich die Bedingungsgleichung

$$bhlp \cdot \tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{6} lh^3 \gamma$$

und hieraus

$$b = h \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{3p}}$$

Iſt etwa $p = 110$ Pfund, ſo hat man

$$b = h \sqrt{\frac{66}{3 \cdot 110}} = 0{,}447 \cdot h$$

beinahe $= \frac{1}{2}h$.

Zweites Capitel.

Vom Gleichgewicht des Waſſers mit, in daſſelbe eingeſenkten feſten Körpern.

---

§. 146.

Erklärung. Das Verhältniß der Gewichte zweier Körper von gleichen Volumen, heißt: ſpeci-

fisches Gewicht. Gewöhnlich wird das reine Wasser als Einheit angenommen, und wenn man also sagt: das specifische Gewicht einer Materie A ist $= \beta$, so heißt dieß soviel: Irgend ein Volumen V dieser Materie wiegt β mal so viel als ein gleiches Volumen Wasser. In diesen Sinn ist hier vom specifischen Gewicht die Rede; übrigens sind alle Abmessungen in Fußen zu verstehen und γ bezeichnet die Zahl 66 als die Anzahl Pfunde, welche ein Cub'fuß Wasser wiegt.

§. 147.

Lehrsatz. Ein ins Wasser getauchter Körper wird von einer Kraft lothrecht in die Höhe gedrückt, welche dem Gewicht des verdrängten Wassers gleich ist.

Beweis. Ist das Volumen des verdrängten Wassers $= V$, so ist das Gewicht der verdrängten Wassermasse $= V\gamma$. Ehe nun der Körper ins Wasser kam, blieb die Wassermasse, obgleich ihr Gewicht $V\gamma$ sie lothrecht nieder trieb, an ihrer Stelle, und hieraus folgt: daß das umgebende Wasser auf diesen Raum V mit einer Gewalt $V\gamma$, von unten nach oben lothrecht wirken muß, welche Einwirkung sich nun auf den an diese Stelle gebrachten Körper äußert.

§. 148.

Zusatz. Ist also das Volumen eines festen Körpers $= V$, sein specifisches Gewicht $= \beta$, sein absolutes also $= V\beta\gamma = P$ Pfunde, und wird dieser Körper ganz unter Wasser getaucht, so muß

1) wenn $\beta > 1$ ist, der Körper wegen des Uebergewichts $P - V\gamma$ ganz zu Boden sinken, oder: es muß ihn eine Kraft $= P - V\gamma$ tragen.

2) Wenn $\beta = 1$ ist, der Körper an jeder Stelle unter Wasser sich erhalten.

3) Wenn $\beta < 1$ ist, der Körper aus dem Wasser sich wieder erheben, und zwar so weit, bis das Gewicht des, von seinem noch untergetauchten Theile, verdrängten Wassers $= V\beta\gamma$ oder $= P$ ist. Der Körper schwimmt also, wenn β kleiner wie 1 ist.

Soll ein Körper, für welchen $\beta < 1$ ist, ganz unter Wasser erhalten werden, so muß eine noch anzubringende Kraft $= V\gamma - P$ ihn lothrecht nach unten pressen.

§. 149.

Lehrsatz. Ein schwimmender Körper kann nur dann in Ruhe sein, wenn sein Schwerpunct mit dem des verdrängten Wassers in eine lothrechte Linie fällt.

Beweis. Die Wahrheit dieser Behauptung erhellet daraus, daß zwei parallel thätige, gleiche, aber entgegengesetzt wirkende Kräfte, nur dann Gleichgewicht untereinander erhalten können, wenn ihre Richtungslinien in einander fallen.

§. 150.

Beispiele. 1. Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, von den Abmessungen b, h, l und dem specifischen Gewicht β (kleiner wie 1), wird so ins Wasser gelegt, daß b und l in horizontale Lage kommen. Die Tiefe x zu bestimmen, mit welcher es sich ins Wasser senkt.

Es ist das Gewicht des schwimmenden Körpers $= bhl\beta\gamma$ und das, des verdrängten Wassers

$= bxl\gamma$; folglich

$bxl\gamma = bhl\beta\gamma$ und hieraus

$x = \beta h$.

II. Ein normaler Kegel vom specifischen Gewicht β, (kleiner wie Eins), der Höhe h und dem Halbmesser r der Grundebene, wird so ins Wasser gesenkt, daß h vertical liegt, die Spitze des Kegels aber außerhalb des Wassers bleibt. Die Tiefe x der Einsenkung zu bestimmen.

Bezeichnet y den Halbmesser, der zum Endpunct von x gehörigen horizontalen Durchschnittsebene des Kegels, so entsteht nach §. 17. die Bedingungsgleichung:

$\frac{1}{3}\pi x\,(r^2 + y^2 + ry)\,\gamma = \frac{1}{3}\pi h r^2 . \beta\gamma$.

Hiezu die Hülfsgleichung $r : y = h : h - x$ genommen, und aus ihr, $x = h \cdot \frac{r-y}{r}$ in die Bedingungsgleichung substituirt, giebt

$h \cdot \frac{r-y}{r}\,(r^2 + y^2 + ry) = hr^2\beta$

oder $r^3 - y^3 = r^3\beta$ und hieraus für

$y = r \cdot \sqrt[3]{1-\beta}$ folglich

$x = h\,(1 - \sqrt[3]{1-\beta})$.

III. Aus P Pfund einer Materie, deren specifisches Gewicht $= \beta$ ist, eine hohle Kugel zu bilden, die sich gerade zur Hälfte ins Wasser senkt.

Bezeichnet x den äußern, y den inneren Halbmesser, so ist, ohne Rücksicht auf das Gewicht der ein-

geſchloſſenen Luft $\frac{4}{3}(x^3 - y^3)\,\pi\beta\gamma = P$ und

$$\frac{2}{3}x^3\pi\gamma = P$$

alſo

$$x = \sqrt[3]{\frac{3P}{2\pi\gamma}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{2\beta - 1}{2\beta} \cdot \frac{3P}{2\pi\gamma}}.$$

§. 151.

Lehrſatz. Der Gewichtsverluſt eines ganz unter Waſſer befindlichen Körpers iſt gleich ſeinem abſoluten Gewicht, dividirt durch ſein ſpecifiſches.

Beweis. Das Volumen des Körpers, alſo auch das des verdrängten Waſſers ſei $= V$; ſein ſpecifiſches Gewicht $= \beta$; ſein abſolutes $= P$; ſein Gewichtsverluſt, oder das Gewicht der Waſſermenge V, ſei $= F$, ſo hat man $P = V\gamma\beta$ und

$$F = V\gamma; \text{ alſo } F = \frac{P}{\beta}.$$

§. 152.

Aufgabe. Zwei Körper, deren abſolute Gewichte $= P$, Q, deren ſpecifiſche aber $= \alpha$, β ſind, ſind ohne Verluſt an Volumen zu einem Körper verſchmolzen und δ bezeichne das ſpecifiſche Gewicht dieſer entſtandenen Materie. Man ſoll eine Gleichung zwiſchen dieſen Größen darſtellen.

Auflöſung. Der Gewichtsverluſt beider Materien einzeln, unter Waſſer iſt $\frac{P}{\alpha}$ und $\frac{Q}{\beta}$; der des entſtandenen Körpers aber $= \frac{P+Q}{\delta}$. Wenn nun, wie

vorausgesetzt ist, keine Vermehrung und Verminderung des Volumens erfolgt ist, so drückt, sowohl $\frac{P}{\alpha} + \frac{Q}{\beta}$, als auch $\frac{P+Q}{\delta}$ das Gewicht eines und desselben Wasserkörpers aus, und es ist also

$$\frac{P}{\alpha} + \frac{Q}{\beta} = \frac{P+Q}{\delta}$$

§. 153.

Zusatz. Ist der Gewichtsverlust des entstandenen Körpers unmittelbar $= F$ gegeben, so hat man

$$\frac{P}{\alpha} + \frac{Q}{\beta} = F.$$

Ist das Volumen V des entstandenen Körpers gegeben, so ist

$$\frac{P}{\alpha} + \frac{Q}{\beta} = V\gamma.$$

§. 154.

Beispiele. I. Eine Mischung von Gold und Silber wiegt 18 Pfund; das specifische Gewicht des Goldes kann $= 20$; das des Silbers $= 10$ gesetzt werden. Die Mischung verliehrt unter Wasser $\frac{1}{2}$ Pfd. Wie viel Gold und wie viel Silber ist darinnen enthalten?

Bezeichnet x die Anzahl Pfunde des Goldes, y die des Silbers, so hat man

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{10} = \frac{1}{2} \text{ und}$$

$x + y = 18$; alſo

$x = 11$

$y = 7$.

II. Mit Q Pfund einer Materie deren ſpecifiſches Gewicht $= \beta$ iſt, ſollen zwei gleich große Kugeln von einer Materie, deren ſpecifiſches Gewicht $= \delta$ iſt, verbunden worden. Die Halbmeſſer x dieſer Kugeln der Bedingung gemäß zu beſtimmen, daß die ganze Verbindung ſich im Waſſer eben ſo verhalte, wie eine Materie vom ſpecifiſchen Gewicht α.

Die Gleichung iſt

$$\frac{Q}{\beta} + \frac{2 \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \delta\gamma}{\delta} = \frac{Q + 2 \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi \delta\gamma}{\alpha};$$

und hieraus folgt

$$r = \sqrt[3]{\frac{\alpha - \beta}{\delta - \alpha} \cdot \frac{3Q}{8\pi\beta\gamma}}.$$

§. 155.

Aufgabe. Die ſpecifiſchen Gewichte feſter und flüſſiger Körper hydroſtatiſch zu beſtimmen.

Auflöſung. 1) Für feſte Körper

a) für ſolche, welche ſpecifiſch ſchwerer wie Waſſer ſind.

Man beobachte den Gewichtsverluſt des Körpers unter Waſſer. Iſt dieſer $= F$; das abſolute Gewicht des Körpers $= P$; ſein ſpecifiſches $= x$, ſo iſt nach §. 151.

$F = \frac{P}{x}$; folglich

$x = \frac{P}{F}$

b) für specifisch leichtere.

Man verbinde einen so schweren Körper, mit dem dessen specifisches Gewicht x bestimmt werden soll, daß die Verbindung im Wasser untersinkt. Ist nun der Gewichtsverlust der Verbindung = F; der des Hülfskörpers = F'; das absolute Gewicht des zu untersuchenden Körpers = P, so hat man nach a,

$$x = \frac{P}{F - F'}$$

2) Für flüssige Körper.

Die Flüssigkeit heiße A, ihr zu bestimmendes specifisches Gewicht sei = x. Ein Körper der sowohl in A als im Wasser untersinkt, und sich nicht auflöße, verliehre im Wasser gewogen P Pfund; in A gewogen Q Pfund, und habe das Volumen V, so ist:

$$P = V\gamma$$

$$Q = V x \gamma; \text{ also}$$

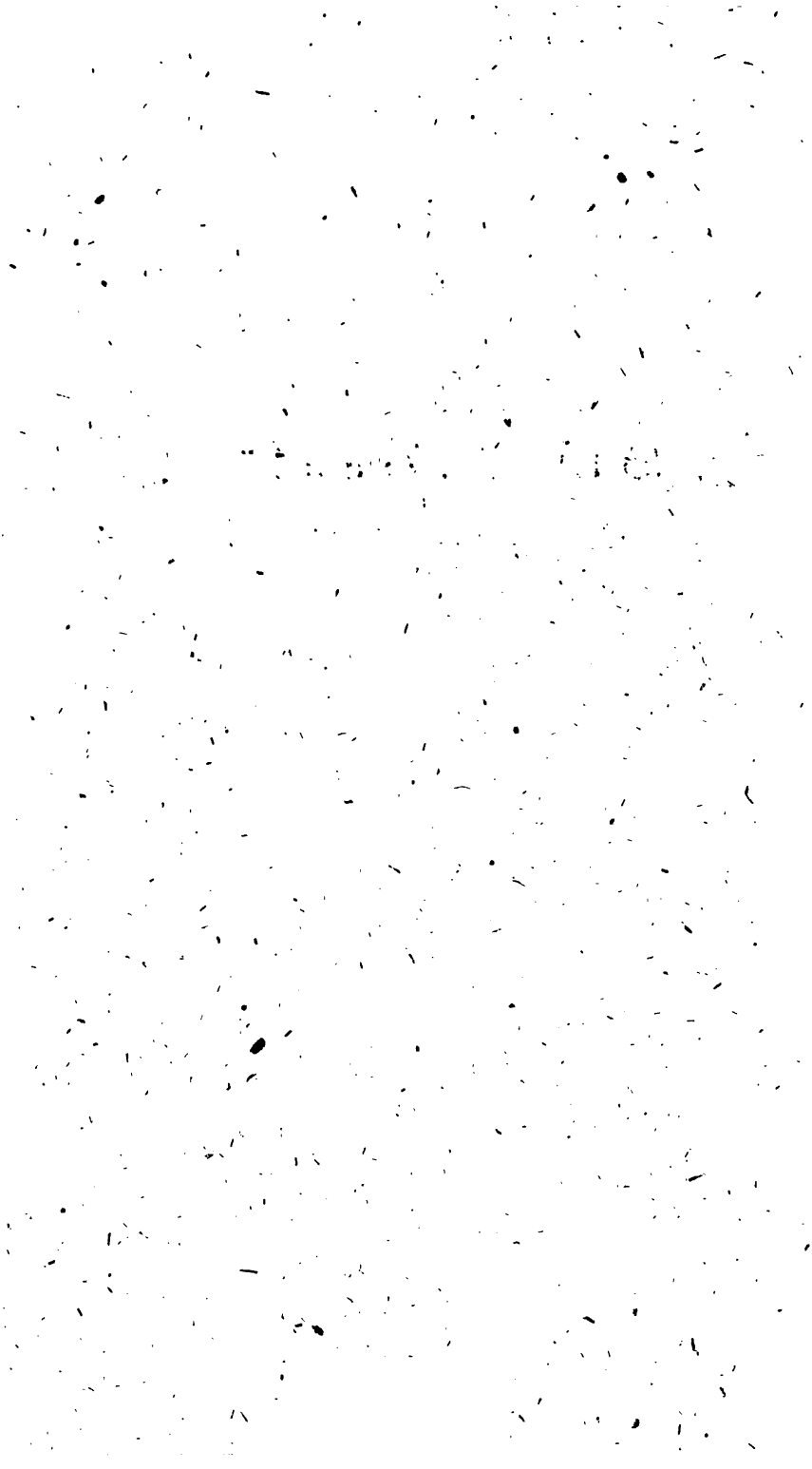
$$x = \frac{Q}{P}$$

§. 156.

Zusatz. Will man das specifische Gewicht x eines festen Körpers, welcher sich im Wasser auflöst, hydrostatisch bestimmen, so bestimme man zuvörderst den Gewichtsverlust Q desselben in einer Flüssigkeit, in welcher er sich nicht auflöst, deren specifisches Gewicht a aber schon bekannt ist. Ist nun P das absolute Gewicht des Körpers, und bezeichnet V das Volumen desselben, so hat man

$$P = V x \gamma$$

Materie.	specif. Gewicht.
Eschen	0,84
Buchen	0,85
Erlen	0,8
Linden	0,6
Tannen	0,5



Die ungleichförmige Bewegung ist entweder

α) beschleunigt, wenn die in gleichen aufeinander folgenden Zeiten, durchlaufenen Wege, immer größer werden.

β) verzögert, wenn sie fortwährend abnehmen.

§. 161.

Erklärung. Bewegen sich 2 Puncte A und B während derselben Zeit t gleichförmig; durchläuft A während dieser Zeit t den Weg a; B während dieser Zeit, den Weg b, und ist a größer wie b, so sagt man: die Schnelligkeit der Bewegung oder die Geschwindigkeit von A ist größer wie die von B. Gewöhnlich nimmt man bei solchen Vergleichungen die Secunde als Zeiteinheit an, setzt also $t = 1$; und nennt den während einer Secunde, bei gleichförmiger Bewegung, durchlaufenen Weg, die Geschwindigkeit des bewegten Punctes.

Ist die Bewegung ungleichförmig, so versteht man unter Geschwindigkeit in irgend einen Punct p der Bahn des bewegten Punctes A, den Weg, welchen dieser Punct A, von p aus, dann durchlaufen würde, wenn er sich, gerade so schnell wie in p, eine Secunde lang, gleichförmig fortbewegte.

§. 162.

Erklärungen. Das Bestreben jedes Körpers in dem Zustand (es sei Ruhe oder Bewegung) zu verharren, in welchem er sich befindet, heißt Behar-

§. 163.

Erklärung. Wird eine Masse M fortwährend von einer Ueberwucht P ergriffen, so daß P die erste Einwirkung in jeden folgenden Augenblick wiederholt, so muß sich M beschleunigt bewegen. Ist nun die beschleunigende Kraft $\frac{P}{M}$ unveränderlich, so heißt die Bewegung **gleichförmig beschleunigt**; ist $\frac{P}{M}$ veränderlich, so heißt die Bewegung **ungleichförmig beschleunigt**. Eben so unterscheiden sich: **gleichförmig verzögerte**, und **ungleichförmig verzögerte Bewegung**.

Der Weg, welchen ein gleichförmig beschleunigt bewegter Körper in der ersten Secunde der Bewegung durchläuft, heißt **Beschleunigung**.

§. 164.

Erklärung. Wirkt die Schwere auf einen Körper, und ist dieser durch eine Unterstützung verhindert, ihrer Einwirkung zufolge, sich zu bewegen, so heißt die Zahl, welche die Größe des entstehenden Drucks, nach irgend einer gewählten Einheit (Loth, Pfund, Centner) angiebt, **das Gewicht des Körpers**.

Haben 2 Körper die Gewichte Q. q, die Massen M, m. so muß die Proportion statt finden:

$$M : m = Q : q,$$

denn: je mehr Materie ein Körper besitzt, desto mehr Theile setzt er den Einwirkungen der Schwere aus, desto größer ist also auch der Druck, welchen er ruhend, auf eine Unterstützung ausüben wird.

Erste Abtheilung.

Die Geomechanik.

Erstes Capitel.

Von der gleichförmigen Bewegung.

§. 165.

Aufgabe.

Ein Punct A bewegt sich mit der Geschwindigkeit c gleichförmig, während t Secunden; man soll den in der Zeit t durchlaufenen Weg h bestimmen.

Auflösung. Da A in jeder der t Secunden, allemal den Weg c zurücklegt, so durchläuft er t mal den Weg c, d. h. es ist $h = c \cdot t$.

§. 166.

Aufgabe. Ein Körper A wird vom Punct p, aus, durch eine Kraft P in eine solche Bewegung versetzt, daß er in jeder Secunde nach der Richtung pf Fig. 56. den Weg c zurücklegen würde. Wenn nun aber dieser Körper A in denselben Augenblick noch von einer andern Kraft R ergriffen wird, welche, wenn P nicht wirkte, den Körper A von p aus nach der Rich-

tung p k in eine ſolche Bewegung verſetzen würde, daß er in jeder Secunde den Weg v zurücklegte; nach welcher Richtung und mit welcher Geſchwindigkeit x wird ſich dann A bewegen?

Auflöſung. Da, unter übrigens gleichen Umſtänden, die Kräfte ſich, wie die aus ihnen entſpringenden Wirkungen verhalten müſſen, ſo hat man

$$P : R = c : v.$$

Macht man daher $pn = c$, $pm = v$ und bildet das Parallelogramm $pmgn$, ſo beſtimmt pg die verlangte Richtung und Geſchwindigkeit.

Iſt etwa $\angle fpk = \alpha$, ſo hat man, wie im §. 54.

$$pg = x = \sqrt{c^2 + v^2 + 2cv\cos\alpha}$$

§. 167.

Zuſatz. Tritt alſo eine bewegter Punct in ſeiner Bahn, aus einer geraden Linie in eine Curve, und iſt jene an der Berührungsſtelle die Tangente von dieſer, ſo verliert derſelbe nichts an Geſchwindigkeit.

Ueberhaupt kann man nach §. 166 Geſchwindigkeiten eben ſo zerlegen und zuſammenſetzen, wie in der Statik, Kräfte.

Zweites Capitel.

Von der gleichförmig beſchleunigten Bewegung.

§. 168.

Aufgabe. Eine Ueberwucht P wirke als eine abſolute Kraft, auf eine Maſſe M, und die beſchleu-

zigende Kraft $\frac{M}{P}$ ist unveränderlich; man soll das Verhältniß verschiedener vom Beginnen der Bewegung an verflossener Zeiten, T; t mit dem Verhältniß der in den letzten Augenblicken dieser Zeiten T, t erlangten Geschwindigkeiten C, c vergleichen.

Auflösung. Sind T, t in Secunden ausgedrückt, und bezeichnet n die unendlich große Anzahl der Einwirkungen von P auf M in jeder Secunde; $e = \frac{1}{n}$ die unendlich kleine Dauer einer Einwirkung, ebenfalls in Secunden, so wird, wenn in Erfolg und während der ersten Einwirkung, M den Weg w durchläuft, während der folgenden Zeit e, blos dem Beharrungsvermögen zufolge, M denselben Weg w, und wegen der stattfindenden zweiten Einwirkung auch den Weg w, also während des zweiten Zeitraums e, den Weg 2 w durchlaufen. Im dritten Zeitaugenblick von e Secunden, wird M den Weg 2 w zufolge des Beharrungsvermögens, und den Weg w in Erfolg der dritten Einwirkung zurücklegen, und also ist

während des 3ten Zeitraums e, der Weg = 3 w
Eben so: — — 4. — -, — — = 4 w
— — 6. — -, — — = 5 w
u. s. w.
— — n. — -, — — = n w
— — nt. — -, — — = nt w
— — nT. — -, — — = nT w

Wenn nun im letzten Augenblick des Zeitraums

nT die abſolute Kraft P plötzlich vernichtet würde, ſo daß M von nun an ſich blos gleichförmig fortbewegen, alſo in jeden folgenden Zeitaugenblick e immer den Weg nTw, zurücklegen würde, ſo wäre der Weg in der nun folgenden Secunde, d. h. die, im letzten Augenblick der Zeit, von T Secunden, oder von nT Zeitaugenblicken e, erlangte Geſchwindigkeit C nach §. 161. gleich n . nTw, oder

$$C = n^2 . Tw.$$

Eben ſo iſt $c = n^2 . tw$

und aus beiden Formeln entſteht

$$Cc = T : t$$

d. h. die erlangten Geſchwindigkeiten verhalten ſich, wie die, vom Beginnen der Bewegung an, verfloſſenen Zeiten.

§. 169.

Aufgabe. Bei derſelben Bezeichnung wie im vor. §. drücke außerdem noch, H den in der Zeit T; h den in der Zeit t zurückgelegten Weg aus. Man ſoll das Verhältniß H : h mit dem T : t vergleichen.

Auflöſung. Nach dem vor §. iſt

$$H = w + 2w + 3w + \ldots + nTw$$

oder

$$H = (1 + 2 + 3 + \ldots + nT)\, w$$

Es iſt aber

$$1 + 2 + 3 + \ldots + nT = (1 + nT)\,\frac{nT}{2}$$

folglich

$$H = (1 + nT)\,\frac{nT}{2}\, w$$

und eben ſo

$$h = (1 + nt)\frac{nt}{2}w; \text{ daher}$$

$$H : h = (1 + nT)\,T : (1 + nt)\,t$$

oder auch

$$H : h = \left(\frac{1}{n} + T\right)T : \left(\frac{1}{n} + t\right)t.$$

Nun iſt aber n unendlich groß, alſo $\frac{1}{n}$ gleich Null, und alſo

$$H : h = T^2 : t^2$$

d. h. die vom Beginnen der Bewegung an, durchlaufenen Wege verhalten ſich wie die Quadrate der verfloſſenen Zeiten.

§. 170.

Zuſatz. Aus §. 168. iſt $C : c = T : t$; alſo auch $C^2 : c^2 = T^2 : t^2$ und ſetzt man $C^2 : c^2$ für $T^2 : t^2$ in §. 169, ſo entſteht

$$H : h = C^2 : c^2$$

d. h. die, von Beginn der Bewegung an, durchlaufenen Wege, verhalten ſich wie die Quadrate der erlangten Geſchwindigkeiten.

§. 171.

Aufgabe. Es bezeichne, mit Beibehaltung der Bedeutung der bisher gebrauchten Buchſtaben, G die Beſchleunigung, d. h. den Weg, welchen M in der erſten Secunde der Bewegung zurücklegt. Man ſoll durch G die im letzten Augenblick der erſten Secunde erlangte Geſchwindigkeit v ausdrücken, d. h. man ſoll den Weg v beſtimmen, welchen M in der zweiten Se-

cunde der Bewegung, blos vermöge ſeines Beharrungsvermögens, durchlaufen wird.

Auflöſung. Aus $H : h = T^2 : t^2$ folgt: wenn man 1 für T; alſo G für H ſetzt, $h = Gt^2$.

Wird nun in dieſe Formel, 2 für t geſchrieben, ſo giebt ſie den Weg in den beiden erſten Secunden der Bewegung $= 4G$. Es iſt aber der Weg in der erſten Secunde $= G$; folglich der in der zweiten

$= 4G - G = 3G$.

Während dieſer zweiten Secunde wird aber M durch die Einwirkung der abſoluten Kraft P nur durch denſelben Weg G getrieben, durch welchen M während der erſten Secunde geführt wurde, und es muß alſo der Ueberſchuß $3G - G = 2G$ der Weg ſein, welchen M während der zweiten Secunde blos in Erfolg ſeines Beharrungsvermögens durchläuft, d. h. es iſt

$$v = 2G$$

oder: die Geſchwindigkeit im letzten Augenblick der erſten Secunde iſt doppelt ſo groß, wie der in der erſten Secunde zurückgelegte Weg.

§. 172.

Zuſatz. Wird die Beſchleunigung G als gegeben angeſehen, ſo hat man alſo folgende zuſammen gehörige Werthe: wenn $T = 1$ Secunde iſt, ſo iſt $H = G$ und $C = v = 2G$. Setzt man dieſe Werthe in die 3 Proportionen §. 168, 169 und 170, ſo erhält man

$$\text{III.}\quad h = g t^2 = \frac{125}{8} t^2$$

$$\text{VI.}\quad t = \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{\frac{8}{125}} \cdot h$$

$$\text{V.}\quad h = \frac{c^2}{4g} = \frac{2}{125} c^2$$

$$\text{VI.}\quad c = 2\sqrt{gh} = \sqrt{\frac{125}{2}} \cdot h$$

Beispiele. 1) Ein schwerer Körper fällt frei herab, während 4 Secunden; welchen Weg h durchläuft er, und wie groß wird seine erlangte Geschwindigkeit c seyn?

Es ist $h = \frac{125}{8} \cdot 4^2 = 250$ Fuß,

und $c = \frac{125}{4} \cdot 4 = 125$ Fuß.

2) Ein schwerer Körper fällt durch 100 Fuß Höhe frei herab; wie groß ist die von Anfang an verflossene Zeit t, und wie groß die erlangte Geschwindigkeit c?

Es ist $t = \sqrt{\frac{8}{125} \cdot 100} = 2{,}53$ Secunden, beinahe:

und $c = \sqrt{\frac{125}{2} \cdot 100} = 79{,}05 \ldots$ Fuß

3) Ein schwerer Körper soll durch freien Fall eine Geschwindigkeit von 1000 Fußen erlangen. Welche Höhe h muß er herabfallen, und welche Zeit t ist dazu erforderlich?

Es ist $h = \frac{1000^2 \cdot 2}{125} = 16000$ Fuß

und $t = \frac{4}{125} \cdot 1000 = 32$ Secunden.

§. 174.

Aufgabe. Es ist die Beschleunigung für den freien Fall, nemlich $g = \frac{125}{8}$ Fuße, ferner die Uebergewicht oder bewegende Kraft P und das Gewicht Q der von P bewegten Masse M gegeben; man soll durch g, P und Q die der beschleunigenden Kraft $\frac{P}{M}$ zugehörige Beschleunigung G ausdrücken.

Auflösung. Je mehr Kraft auf jeden Theil der bewegten Masse wirkt, desto schneller muß auch die Bewegung seyn, desto größer also auch der, in einer und derselben Zeit, durchlaufene Weg. Beziehen sich daher P'; Q'; M'; G' eben so auf einander, wie P, Q, M, G, so hat man:

$$\frac{P}{M} : \frac{P'}{M'} = G : G'$$

Es ist aber $M : M' = Q : Q'$ §. 164 und folglich auch:

$$\frac{P}{Q} : \frac{P'}{Q'} = G : G'.$$

Beim freien Fall ist die Uebergewicht dem Gewicht der bewegten Masse gleich; wenn also P', Q', M', G' auf den freien Fall bezogen werden, so hat man $P' = Q'$ also $\frac{P'}{Q'} = 1$ und $G' = g = \frac{125}{8}$; folglich

$$\frac{P}{Q} : 1 = G : g$$

und hieraus

$$G = g\,\frac{P}{Q}.$$

Beispiel. Ueber eine um ihre horizontale Achse bewegliche Rolle ist ein Faden gelegt, der zu beiden Seiten lothrecht herabhängt; an der einen Seite ist an dem Faden ein Gewicht von 6 Pfunden, an der andern Seite eins von 9 Pfunden angehängt. Wenn nun das Gewicht des Fadens, seine Steifigkeit, das Gewicht der Rolle und die Reibung an ihren Zapfen beiseite gesetzt werden, wie groß ist dann die Beschleunigung G?

Hier ist $P = 9 - 6 = 3$ Pfund

$Q = 9 + 6 = 15$ Pfund

also

$$G = \frac{125}{8} \cdot \frac{3}{15} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8} \text{ Fuß.}$$

§. 175.

Aufgabe. Es ist die Ueberwucht P; das Gewicht Q der von ihr bewegten Masse und eine der 3 Größen: von Anfang der Bewegung an, verflossenen Zeit = t; während derselben durchlaufener Weg = h; im letzten Augenblick erlangte Geschwindigkeit c, gegeben; man soll dadurch die beiden andern bestimmen.

Auflösung. Man schreibe $g\frac{P}{Q}$ für G in die 6 Formeln §. 172. Die verlangten Resultate sind:

$$\text{I. } c = 2g\frac{P}{Q} \cdot t$$

$$\text{II. } t = \frac{cQ}{2gP}$$

$$\text{III. } h = g\frac{P}{Q}\, t^2$$

$$\text{VI. } t = \sqrt{\frac{2hQ}{gP}}$$

$$V.\ h = \frac{c^2 Q}{4gP}$$

$$VI.\ c = 2\sqrt{g\frac{P}{Q}h}$$

in welchen Formeln g die Zahl $\frac{355}{113}$ bedeutet.

§. 176.

Beispiel. Ein schwerer Körper von Gewicht Q fällt frei (d. h. ohne Berücksichtigung des Widerstandes der Luft und der Reibung) auf einer schiefen Ebene herab, welche unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt ist, und es bezeichne T die Anzahl Secunden, während welcher er sich, von Anfang an, bewegt, H den auf der schiefen Ebene zurückgelegten Weg, C die erlangte Geschwindigkeit, und G die Beschleunigung. Ferner sollen, in Beziehung auf den freien lothrechten Fall t, h c, g ebenfalls Zeit, Weg, erlangte Geschwindigkeit und Beschleunigung ausdrükken. Man soll diese Größen untereinander vergleichen.

Es sey Fig 57. die Länge AD der schiefen Ebene $= a$; ihre Höhe $AB = b$, so ist die bewegende Kraft, welche das Gewicht Q die schiefe Ebene herab treibt $= Q \sin\alpha$ (§. 106.) folglich

$$G = g\frac{Q\sin\alpha}{Q} = g\sin\alpha = g\frac{b}{a}.$$

und hieraus

$$I.\ G : g = b : a$$

d. h. die Beschleunigung auf der schiefen Ebene verhält sich zu der beim freien Fall wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Ferner iſt

$$C = 2g\frac{b}{a}T \text{ und}$$

$$c = 2gt; \text{ alſo,}$$

wenn $T = t$ angenommen wird

$$\text{II. } C : c = b : a.$$

Dann hat man auch

$$H = g\frac{b}{a}T^2 \text{ und}$$

$$h = gt^2; \text{ alſo,}$$

für $T = t$;

$$\text{III. } H : h = b : a$$

und aus dieſer Proportion erkennt man bald, die Richtigkeit des bekannten Galiläiſchen Geſetzes, daß der lothrechte Durchmeſſer eines Kreiſes und jede aus einem ſeiner Endpuncte gezogene Sehne, gleichzeitig durchlaufen werden.

Aus $H = g\frac{b}{a}T^2$

und $h = gt^2$;

wenn $H = a$ und $h = b$

angenommen wird, folgt auch

$$\frac{a^2}{b} = gT^2 \text{ und}$$

$b = gt^2$; und hieraus

$a^2 : b^2 = T^2 : t^2$; oder

$$\text{IV. } a : b = T : t;$$

d. h. wenn ein ſchwerer Körper die Länge a der ſchiefen Ebene, ein anderer frei lothrecht fallend, die Höhe b derſelben durch-

läuft, so verhalten sich diese durchlaufenen Wege wie die von Anfang an verflossenen Zeiten.

Endlich ist noch

$$C = 2\sqrt{g\frac{b}{a} \cdot H} \text{ und}$$

$$v = 2\sqrt{gh}$$

Wird also $H = a$ und $h = b$ angenommen, so folgt

$$C = 2\sqrt{gb} \text{ und,}$$

$$h = 2\sqrt{gb}; \text{ und folglich ist}$$

V. $C = c$.

d. h. ein schwerer Körper erlangt dieselbe Geschwindigkeit, er mag die Länge der schiefen Ebene frei herabgleiten, oder ihre lothrechte Höhe frei herabfallen.

§. 177.

Aufgabe. Ein Körper vom Gewicht Q besitzt in dem Augenblick schon die Geschwindigkeit v, in welchen derselbe nach eben der Richtung, von einer absoluten, von nun an fortdauernd einwirkenden, Uebermacht P ergriffen wird. Welche Geschwindigkeit c wird derselbe nach Verlauf von t Secunden erlangt haben, und wie groß wird der während der Zeit t durchlaufene Raum h seyn?

Auflösung. Man denke sich v, vom Beginnen der Bewegung an, durch dieselbe bewegende Kraft P erzeugt, so ist die hiezu erforderliche Zeit

$= \frac{vQ}{2gP}$ (§. 175. II.) und der, während derselben durch

laufene Weg $= \frac{v^2 Q}{4gP}$ (§. 175. V.); und nun iſt c die zur Zeit $\frac{vQ}{2gP} + t$ gehörige Endgeſchwindigkeit, und h der Unterſchied der Wege in den Zeiten $\frac{vQ}{2gP} + t$ und $\frac{vQ}{2gP}$; alſo, nach §. 175. I.

$$c = 2g\frac{P}{Q}\left(\frac{vQ}{2gP} + t\right)$$

oder

$$\text{I.}\quad c = v + 2g\frac{P}{Q} \cdot t$$

und, nach §. 175. III.

$$h = g\frac{P}{Q}\left[\frac{vQ}{2gP} + t\right]^2 - g\frac{P}{Q}\cdot\left(\frac{vQ}{2gP}\right)^2$$

oder

$$\text{II.}\quad h = vt + g\frac{Q}{P}\cdot t^2.$$

§. 178.

Zuſatz. Setzt man der Bequemlichkeit wegen G für $g\frac{P}{Q}$, ſo ergeben ſich aus den beiden Formeln in §. 177. noch folgende:

$$\text{III.}\quad v = c - 2Gt.$$

$$\text{IV.}\quad t = \frac{c - v}{2G}.$$

$$\text{V.}\quad v = \frac{h - Gt^2}{t}.$$

$$\text{VI.}\quad t = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 4Gh}}{2G}$$

$$\text{VII.}\quad h = ct - Gt^2$$

$$\text{VIII.}\quad t = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4Gh}}{2G}$$

IX. $h = \frac{c^2 - v^2}{4G}$

X. $c = \sqrt{v^2 + 4Gh}$

XI. $v = \sqrt{c^2 - 4Gh}$

XII. $c = \frac{h + Gt^2}{t}$

§. 179.

Beispiel. Ein schwerer Körper, vom Volumen V und dem specifischen Gewicht β also dem absoluten $P = V\beta\gamma$ fällt h Fuß hoch, frei lothrecht herab, auf die Oberfläche eines stillstehenden Wassers. Welche Zeit t ist hiezu erforderlich? wie groß ist die erlangte Geschwindigkeit v? nach wie viel Secunden x vom Augenblick des Treffens des Wasserspiegels an gerechnet, wird derselbe ohne Berücksichtigung des Widerstandes, welchen das Ausweichen des Wassers entgegensetzt, e Fuß unter dem Wasserspiegel sich befinden? welche Geschwindigkeit y wird derselbe in letzten Augenblick dieser Bewegung unterm Wasser, besitzen?

Es ist $t = \sqrt{\frac{h}{g}}$ §. 173. IV.

ferner $v = 2\sqrt{gh}$ §. 173. VI.

da nun, unterm Wasser, die bewegende Kraft nur noch

$$= P - V\gamma = P - \frac{P}{\beta}$$

ist, so ist also, unterm Wasser

$$G = g\,\frac{P - \frac{P}{\beta}}{P} = g\,\frac{\beta - 1}{\beta};$$

folglich nach §. 178. VI.

$$x = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 4G \cdot e}}{2G}$$

$$= \frac{-2\sqrt{gh} + \sqrt{4gh + 4g\frac{\beta - 1}{\beta} e}}{2g\frac{\beta - 1}{\beta}}$$

oder

$$x = \frac{-\sqrt{h} + \sqrt{h + \frac{\beta - 1}{\beta} e}}{\frac{\beta - 1}{\beta} \cdot \sqrt{g}}$$

und, nach §. 178. X.

$$y = \sqrt{v^2 + 4Ge}$$

$$= \sqrt{4gh + 4g\frac{\beta - 1}{\beta} \cdot e}$$

$$= 2\sqrt{g\left(h + \frac{\beta - 1}{\beta} \cdot e\right)}$$

Aus der letzten Formel folgt, daß $y = 0$ wird, wenn

$$\beta = \frac{e}{e + h} \text{ ist.}$$

Ist etwa $h = 250$ Fuß: $\beta = \frac{5}{6}$; so erhält man

$t = 4$ Secunden

$v = 125$ Fuß

Wird nun $e = 100$ Fuß genommen, so folgt

$x = 2 - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{5} = 1{,}1056$ Sec.

$y = 25 \cdot \sqrt{5} = 55{,}9$ Fuße

Für $e = 125$ Fuß erhält man $x = 2$ Secunden;

$y = 0$.

Drittes Capitel.

Von der gleichförmig verzögerten Bewegung.

§. 180.

Aufgabe. Ein Körper dessen Gewicht $= Q$ ist, besitzt eine Geschwindigkeit v und es wirkt von nun an eine absolute Kraft P als Uebermacht auf ihn, und zwar nach der v gerade entgegengesetzten Richtung, so daß also Q von diesem Augenblick an, eine gleichförmig verzögerte Bewegung annehmen muß. Man soll die, von nun an, nach t Secunden, noch stattfindende Geschwindigkeit c und den während der Zeit t zurückgelegten Weg h bestimmen.

Auflösung. Ganz so, wie in §. 177., hat man hier

$$\text{I.}\quad c = v - 2Gt$$
$$= v - 2g\frac{P}{Q}t$$
$$\text{II.}\quad h = vt - Gt^2$$
$$= vt - g\frac{P}{Q}t^2.$$

§. 181.

Zusatz. Aus den beiden Formeln in vor. §. ergeben sich noch folgende:

$$\text{III.}\quad v = c + 2Gt.$$
$$\text{IV.}\quad t = \frac{v-c}{2G}.$$
$$\text{V.}\quad v = \frac{h + Gt^2}{t}.$$

$$\text{VI. } t = \frac{v - \sqrt{v^2 - 4Gh}}{2G}.$$

$$\text{VII. } h = ct + Gt^2.$$

$$\text{VIII. } t = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4Gh}}{2G}$$

$$\text{IX. } h = \frac{v^2 - c^2}{4G}$$

$$\text{X. } c = \sqrt{v^2 - 4Gh}$$

$$\text{XI. } v = \sqrt{c^2 + 4Gh}$$

$$\text{XII. } c = \frac{h - Gt^2}{t}.$$

§. 182.

Aufgabe. Ein Körper dessen Gewicht = Q ist, besitzt eine Geschwindigkeit v, und es wirkt von nun an eine absolute Kraft P als Uebermacht auf ihn, und zwar nach der, v gerade entgegesetzten Richtung, so daß also Q von diesem Augenblick an, eine gleichförmig verzögerte Bewegung annehmen muß. Nach wie viel Secunden = t wird die anfängliche Geschwindigkeit v gänzlich vernichtet sein, und welchen Weg h wird während dieser Zeit der Körper durchlaufen haben?

Auflösung. Man setze c = 0; so ergiebt sich aus §. 181. III.

$$\text{I. } v = 2Gt = 2g\frac{P}{Q}t$$

und aus §. 181. IX.

$$\text{II. } h = \frac{v^2}{4G} = \frac{v^2 Q}{4gP}.$$

§. 183.

Zuſatz. Setzt man den Werth für v aus I. in II., ſo entſteht

$$\text{III. } h = g \frac{P}{Q} t^2$$

und aus dieſen 3 Formeln

$$\text{I. } v = 2g \frac{P}{Q} t$$

$$\text{II. } h = \frac{v^2 Q}{4gP}$$

$$\text{III. } h = g \frac{P}{Q} t^2$$

ergeben ſich noch durch Entwickelung

$$\text{IV. } t = \frac{vQ}{2gP}$$

$$\text{V. } v = 2\sqrt{g \frac{P}{Q} h}$$

$$\text{VI. } t = \sqrt{\frac{hQ}{gP}}$$

welche 6 Formeln, für die ganze Dauer der gleichförmig verzögerten Bewegung gültig, mit denen 6 in §. 175. für die gleichförmig beſchleunigte Bewegung, vollkommen übereinſtimmen.

§. 184.

Zuſatz. Wird ein ſchwerer Körper, mit der anfänglichen Geſchwindigkeit v, lothrecht in die Höhe geworfen, ſo nimmt derſelbe, wegen Gegenwirkung der Schwere eine gleichförmig verzögerte Bewegung an, und will man die 12 Formeln §. 180. und 181., ſo wie die 6 in §. 182. und 183. für dieſe Bewegung

anwenden, so muß man $g = \frac{125}{8}$ für G oder 1 für $\frac{P}{Q}$ in dieselben setzen.

§. 185.

Beispiele. I. Ein schwerer Körper wird mit einer anfänglichen Geschwindigkeit von 800 Fuß lothrecht in die Höhe geworfen. Nach wie viel Secunden t befindet sich derselbe im höchsten Punct seines Steigens? wie hoch h steigt er überhaupt? und nach wie viel Secunden x befindet er sich 1200 Fuß über dem Auswerfungspunct?

Es ist, nach §. 183. IV.

$$t = \frac{800}{2 \cdot \frac{125}{8}} = 25{,}6 \text{ Secunden}$$

und nach §. 183. II.

$$h = \frac{800^2}{4 \cdot \frac{125}{8}} = 10240 \text{ Fuß}$$

ferner, nach §. 181. VI.

$$x = \frac{800 - \sqrt{800^2 - 4 \cdot \frac{125}{8} \cdot 1200}}{2 \cdot \frac{125}{8}}$$

$= 1{,}546$ Secunden.

II. Ein Körper von 300 Pfund Gewicht, bewegt sich mit einer anfänglichen Geschwindigkeit von 30 Fuß auf einer horizontalen Ebene. Wenn nun für die stattfindende Reibung, der Coefficient $\mu = \frac{1}{5}$ ist, wie viel Secunden t dauert dann überhaupt die ent-

ſtehende gleichförmig verzögerte Bewegung? welcher Weg h wird im Ganzen durchlaufen? und welcher Weg x wird in den erſten 2 Secunden zurückgelegt? Hier iſt $P = \mu . 300 = 60$;

$$Q = 300; \text{ alſo } G = \frac{125}{8} . \frac{60}{300} = \frac{25}{8};$$

folglich

$$t = \frac{30}{2 . \frac{25}{8}} = 4{,}8 \text{ Secunden.}$$

$$h = \frac{30^2}{4 . \frac{25}{8}} = 72 \text{ Fuß}$$

$$x = 30 . 2 - \frac{25}{8} . 2^2 = 47{,}5 \text{ Fuß.}$$

Viertes Capitel.

Vom Stoß.

§. 186.

Erklär. Trift ein Körper, welcher in Bewegung iſt, einen andern in Ruhe oder in Bewegung befindlichen Körper dergeſtalt, daß die Richtungen, in welchen ſich die Schwerpuncte beider Körper befinden, in einer geraden Linie liegen, und zugleich die aneinander ſtoßenden Flächen auf dieſer Linie normal ſind, ſo ſagt man: der Stoß iſt gerade oder central, außerdem ſchief oder excentriſch.

Die ſtoßenden Körper ſind entweder hart, wenn

ſich ihre Geſtalt durch die Einwirkung nicht ändert; weich, wenn ſie eine andere Geſtalt annehmen und behalten: elaſtiſch, wenn ſich die Geſtalt ändert, aber wieder hergeſtellt. Hier iſt nur von harten Körpern die Rede.

§. 187.

Lehrſatz. Das Product aus dem Gewicht Q einer bewegten Maſſe M in die Geſchwindigkeit C, womit ſie einen andern Körper central trift, beſtimmt die Größe des Stoßes E in Beziehung auf denjenigen Centralſtoß e als Einheit, welchen eine Maſſe, deren Gewicht = 1 und deren Geſchwindigkeit = 1 iſt, auf einen ruhenden Körper äußert.

Beweis. Die Größe des Stoßes iſt abhängig, von der Menge materieller Theile des ſtoßenden Körpers und von der Geſchwindigkeit, womit er den andern Körper trift. Beziehen ſich alſo Q'; M'; C'; E' eben ſo auf einander wie Q, M, C, E, ſo hat man

$$E : E' = MC : M'C'.$$

Es iſt aber $M : M' = Q : Q'$; alſo auch

$$E : E' = QC : Q'C'.$$

Iſt nun $Q' = 1$; $C' = 1$; alſo $E' = e =$ der Einheit des Stoßes, ſo erhält man $E = QC$ ſolche Einheiten.

§. 188.

Erklär. Das Product QC, oder auch das MC als Maaß für die Größe des Stoßes wird: das Bewegungsvermögen des Körpers, oder auch: die Größe ſeiner Bewegung, genannt.

§. 189.

Aufgabe. Ein Körper, deſſen Gewicht $= Q$ und deſſen Geſchwindigkeit $= c$ iſt, trift einen andern vom Gewicht R und der Geſchwindigkeit v central; man ſoll die Größe der Geſchwindigkeit x beſtimmen, mit welcher ſich beide Körper vereint, nach dem Stoße fortbewegen werden.

Auflöſung. Die Summe der Bewegungsvermögen vor dem Stoß iſt $= Qc + Rv$. Nach dem Stoß iſt das Bewegungsvermögen beider $= (Q + R)x$. Da nun durch den Stoß wohl Geſchwindigkeit, aber nicht Bewegungsvermögen verlohren geht, ſo iſt alſo

$$Qc + Rv = (Q + R)x$$

folglich $x = \frac{Qc + Rv}{Q + R}$

§. 190.

Zuſatz. Iſt $v = o$; ſo hat man

$$x = \frac{Qc}{Q + R}$$

Iſt v negativ, etwa $= -w$; ſo iſt

$$x = \frac{Qc - Rv}{Q + R}$$

§. 191.

Aufgabe. Ein Rammbär vom Gewicht P fällt h Fuß hoch herab, und trift einen Pfahl vom Gewicht Q welcher in Erfolg dieſes einen Schlags, e Fuß tiefer in die Erde dringt. Man ſoll durch dieſe Größen den Widerſtand R beſtimmen, mit welchen die den Pfahl umgebende Erde jetzt dem Eindringen widerſteht.

Auflösung. Die Geschwindigkeit c, womit der Bär den Pfahl trift, ist $= 2\sqrt{gh}$

folglich die Geschwindigkeit v womit Bär und Pfahl nach erfolgten Stoß die Bewegung fortzusetzen sich bestreben, nach §. 190. $= \frac{P \cdot 2\sqrt{gh}}{P+Q}$.

Der Widerstand R vernichtet aber, während dem $P+Q$ den Weg e durchlaufen, diese Geschwindigkeit v, und es ist also nach §. 183. V.

$$v = 2\sqrt{g\frac{R}{P+Q} \cdot e}.$$

Setzt man beide Werthe für v einander gleich, so entsteht

$$\frac{P \cdot 2\sqrt{gh}}{P+Q} = 2\sqrt{g\frac{R}{P+Q}e}$$

und hieraus

$$R = \frac{h}{e} \cdot \frac{P^2}{P+Q}$$

§. 192.

Zusatz. Bezeichnet VV die Last, welche der Bär soll tragen können, so verfährt man sicher, VV bedeutend kleiner als R, etwa $VV = \frac{1}{16}R$ anzunehmen, und hat dann $16\,VV = \frac{h}{e} \cdot \frac{P^2}{P+Q}$

Ist etwa VV gegeben, und soll e bestimmt werden, so ergiebt sich $e = \frac{h}{16\,VV} \cdot \frac{P^2}{P+Q}$.

Beispiel. Ein Pfahl von 800 Pfund Gewicht soll eine Mauer von 16 Quadratfuß Grundfläche und

ugalkraft oder Flieh kraft. Die gleich große Thätigkeit, welche nach der Richtung des Halbmessers entgegengesetzt im Mittelpunct des Kreises wirken muß, damit die Masse M sich nicht vom Mittelpunct entfernt, sondern ihre Bewegung in der Peripherie fortsetzt, heißt die Centripetalkraft.

§. 194.

Aufgabe. Es bezeichne Q das Gewicht eines materiellen Punctes M; (welches Gewicht hier aber durch eine anderweitige Thätigkeit als aufgehoben angesehen werden muß) c die Geschwindigkeit womit sich M in der Peripherie eines Kreises fortbewegt; r den Halbmesser dieses Kreises; man soll die im Mittelpunct des Kreises nothwendige Centripetalkraft P bestimmen, um M in der Peripherie zu erhalten.

Auflösung. Ist M jetzt in a Fig. 58., so würde in der nächstfolgenden unendlich kleinen Zeit t, wenn P im Mittelpunct g nach der Richtung ag, nicht wirkte, M nach der Richtung der Tangente, den Weg ab = c . t zurücklegen. Wirkt aber P in der erforderlichen Größe, so durchlauft M in dieser Zeit t, den Weg af = ct in der Peripherie des Kreises, und die Thätigkeit von P muß also darinnen bestehen, daß sie durch fortdauernde Einwirkung die Masse M vom Gewicht Q in der Zeit t durch den Weg bf führt.

Diese Bedingung wird nach §. 175. III. durch die Gleichung $bf = g \frac{P}{Q} . t^2$ ausgedrückt.

Da nun t unendlich klein gedacht wird, so können die Tangente a b und der gleich große Bogen a f = c t als zu einem und demselben Mittelpunctswinkel gehörig angesehen werden, und es verhält sich daher

$$fb : ab = ab : 2r + bf$$

wo b f als unendlich klein, gegen 2 r verschwindet, so daß also

$$fb : ab = ab\ 2r \text{ und folglich}$$

$$bf = \frac{(ab)^2}{2r} = \frac{c^2 t^2}{2r}$$

zu setzen ist. Werden nun die beiden Werthe für b f einander gleichgesetzt, so entsteht

$$g \frac{P}{Q} t^2 = \frac{c^2 f^2}{2r} \text{ und hieraus}$$

$$P = \frac{c^2 Q}{2gr}.$$

S. 195.

Beispiel. Die lothrechte Linie p m Fig. 59 drehe sich um sich selbst, dergestalt, daß sie in jeder Secunde n Umdrehungen macht. In f sei vermittelst eines Fadens p f = a, ein schwerer Punct f vom Gewicht Q angehangen, der Faden sei um d beweglich. Unter welchen Winkel x mit der Verticallinie p m wird Q fürs Gleichgewicht während der Bewegung den Faden erhalten?

Die Geschwindigkeit des Körpers vom Gewicht Q ist = n . 2 a Sin x . π; folglich die Centrifugalkraft nach der horizontalen Richtung f k

$$= \frac{(n \cdot 2a \operatorname{Sin} x \cdot \pi)^2 \cdot Q}{2g \cdot a \operatorname{Sin} x}$$

$$= \frac{2n^2 \pi^2 a \operatorname{Sin} x \cdot Q}{g}$$

ferner die lothrechte Wirkung nach der Richtung $fg = Q$, und da beide durch den Faden im Gleichgewicht erhalten werden, so ist nach dem Parallelogramm der Kräfte

$$Q \text{ tang } x = \frac{2n^2\pi^2 a \operatorname{Sin} x \,.\, Q}{g}; \text{ also}$$

$$\operatorname{Cos} x = \frac{g}{2a\pi^2 n^2}.$$

§. 196.

Aufgabe. In irgend einem Punct A eines festen Systems befindet sich eine Masse M vom Gewicht Q, in irgend einen andern Punct F desselben wirkt eine Kraft P; die Puncte A und F liegen so, daß wenn F die Geschwindigkeit w annimmt, dann A die c hat. Wenn nun M aus A weggenommen, und dafür in einen andern Punct B, welcher so liegt, daß B die Geschwindigkeit v erhält, wenn F die w annimmt, eine Masse N vom Gewicht x hingelegt wird, wie groß muß dann x sein, damit der Erfolg derselbe bleibt, d. h. damit der Punct F dieselbe Geschwindigkeit w annimmt, es mag Q in A oder x in B liegen.

Auflösung. I. Liegt die Masse M vom Gewicht Q in A, (welches Gewicht hier aber durch eine anderweitige Thätigkeit als aufgehoben angesehen werden muß); aber x noch nicht in B, so ist nach dem Carteſiſchen Grundſatz, der Widerſtand, welcher in A mit der Kraft P in F, Gleichgewicht erhalten würde $= \frac{P \,.\, w}{c}$; und so groß ist also die auf Q wirkende Ueberwucht, folglich die Beſchleunigung des Punctes A

gleich $g\,\frac{P\frac{w}{c}}{Q} = \frac{gPw}{Qc}$, und daher die des Punctes F

$$= \frac{w}{c} \cdot \frac{gPw}{Qc} = \frac{gPw^2}{Qc^2}.$$

2) Liegt die Maſſe N vom Gewicht q in B, (welches Gewicht hier aber durch eine anderweitige Thätigkeit als aufgehoben angeſehen werden muß) aber Q nicht in A, ſo iſt eben ſo beſtimmt, die auf x wirkende Ueberwucht, $= \frac{Pw}{v}$, für daſſelbe w, der Bedingung gemäß, verſtanden; alſo die Beſchleunigung des Punctes $B = g\,\frac{P\frac{w}{v}}{x} = \frac{gPw}{xv}$; und folglich die des Punctes $F = \frac{w}{v} \cdot \frac{gPw}{xv} = \frac{gPw^2}{x \cdot v^2}$.

Aus 1) und 2) folgt

$$\frac{gPw^2}{Qc^2} = \frac{gPw^2}{x \cdot v^2} \text{ und hieraus}$$

$$x \cdot v^2 = Q \cdot c^2; \text{ alſo}$$

$$x = \frac{Qc^2}{v^2}.$$

§. 197.

Zuſatz. Iſt von drehender Bewegung die Rede, und bezeichnet a die Entfernung des Punctes A; b die des Punctes B von der Drehachſe, ſo iſt

$$c : v = a : b; \text{ alſo auch}$$

$$c^2 : v^2 = a^2 : b^2.$$

Nach §. 196. war aber

$x : Q = c^2 : v^2$ und folglich hat man auch

$$x : Q = a^2 : b^2; \text{ oder}$$
$$x \cdot b^2 = Q \cdot a^2$$

§. 198.

Erklärung. Das Product aus dem Gewicht einer Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit, oder auch in das Quadrat ihrer Entfernung von der Drehachse, heißt: **das Moment der Trägheit dieser Masse.**

Zwey Massen haben also einerlei Einfluß auf die Größe einer entstehenden Bewegung, wenn die Momente ihrer Trägheit gleich groß sind, und nach diesem Gesetz lassen sich Massen eben so durch die Momente der Trägheit reduciren, wie Kräfte durch statische Momente.

Wirkt z. B. in einem Punct A ein Widerstand von der Größe Q am Hebelsarm a, so ist der gleichgültige Widerstand in einem andern Punct B, am Hebelsarm b in Beziehung auf dieselbe Drehachse, $= \frac{Qa}{b}$.

Bezeichnet aber Q das Gewicht einer todten Masse, so daß Q nicht als eine widerstehende Kraft anzusehen ist, so ist das Gewicht einer gleichgültigen Masse in B $= \frac{Qa^2}{b^2}$.

Die Formeln bleiben dieselben, ob a und b die Entfernungen von einer statt findenden Drehachse, oder die gleichzeitigen Wege der Puncte A und B, d. h. die Geschwindigkeiten dieser Puncte, bezeichnen.

§. 199.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit K eines normalen Cylinders in Beziehung auf seine Achse zu bestimmen.

Auflösung. Der Halbmesser der Grundebene des Cylinders sei = r Fuße, seine Höhe = h Fuße; das Gewicht eines Cubicfußes seiner Materie = p.

1) Man denke sich r in eine unendliche Menge n, gleiche Theilchen = e getheit, so daß also $n \cdot e = r$ ist; und dann die concentrischen Cylinder-Mäntel zu den Halbmessern e, 2e, 3e, u. s. w. gebildet, so ist das Gewicht der Masse des Cylinders zum Halbmesser $e = e^2 \pi . hp$; das Gewicht der Masse des hohlen Cylinders, den Halbmesser 2e und e zugehörig $= (2e)^2 \pi hp - e^2 \pi hp = 3e^2 \pi hp$; das Gewicht der Masse des hohlen Cylinders, den Halbmessern 3e und 2e zugehörig

$= (3e)^2 \pi hp - (2e)^2 \pi hp = 5e^2 \pi hp$;

das des folgenden

$= [(4e)^2 - (3e)^2] \pi hp = 7e^2 \pi hp$ u. s. w.

endlich das des letzten

$= \left[(ne)^2 - [(n-1)e]^2\right] \pi hp = (2n-1)e \pi hp$

2) Da e unendlich klein ist, so kann man die Masse des ersten vollen Cylinders, im Mantel zum Halbmesser $\frac{e}{2}$; die Masse, des ersten hohlen Cylinders im Mantel zum Halbmesser $\frac{3e}{2}$; die Masse des folgenden hohlen Cylinders im Mantel zum Halbmesser $\frac{5e}{2}$ u. s. w.

endlich die Maſſe des letzten hohlen Cylinders im Mantel zum Halbmeſſer $\frac{(2n-1)e}{2}$ als vereint anſehen.

3. Nach 1; und 2; hat man dann das Moment K der Trägheit des ganzen Cylinders

$$= e^2\pi hp\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^2 + 3e^2\pi hp\cdot\left(\frac{3e}{2}\right)^2 + 5e^2\pi hp\left(\frac{5e}{2}\right)^2$$
$$+ 7e^2\pi hp\cdot\left(\frac{7e}{2}\right)^2 + \ldots + (2n-1)e^2\pi hq\cdot\left[\frac{(2n-1)e}{2}\right]^2$$
$$= \frac{e^4}{4}\pi hp\,[1 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + (2n-1)^3]$$

4) Es iſt aber nach der Lehre von den arithmetiſchen höhern Progreſſionen (ſiehe meine Arithmetik ꝛc.) hier

$$x_1 = 1;\ d^1x_1 = 26;\ d^2x_1 = 72;$$
$$d^3x_1 = 48;\ \text{alſo}$$
$$1 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 =$$
$$n\cdot 1 + n_2\cdot 26 + n_3\cdot 72 + n_4\cdot 48$$
$$= n^2\cdot(2n^2-1);$$

folglich

$$K = \frac{e^4}{4}\pi hp\cdot n^2\cdot(2n^2-1)$$

Nun iſt aber $n\cdot e = r$; alſo

$$e = \frac{r}{n}\ \text{daher}$$

$$K = \frac{r^4}{4}\pi hp\cdot\frac{2n^2-1}{n^2};\ \text{oder}$$

$$K = \frac{r^4}{4}\pi hp\cdot\left(2-\frac{1}{n^2}\right);\ \text{alſo weil}\ n =$$

unendlich groß, folglich $\frac{1}{n^2} =$ Null iſt,

$$K =$$

$K = \frac{r^4}{4} \pi h p \cdot 2$ oder auch

$K = \frac{1}{2} r^4 \pi h p$

§. 200.

Zusatz. Reducirt man die gesammte Masse in den Mantel des Cylinders, so erhält man $\frac{K}{r^2} = \frac{1}{2} r^2 \pi h p$ oder, wenn Q das ganze Gewicht des Cylinders ausdrückt, seine in den Mantel reducirte Masse $= \frac{1}{2} Q$; welches Gesetz leicht in Worte zu übertragen ist.

§. 201.

Beispiel. Die Höhe eines normalen Cylinders sei $= 2$ Fuße; der Halbmesser seiner Grundebene $= 1\frac{3}{4}$ Fuße; jeder Cubicfuß seiner Materie wiege 160 Pfund; derselbe ist um seine lothrechte Achse beweglich und die Halbmesser der Zapfen dieser Achse sind $= \frac{1}{2}$ Zoll. Wenn nun um den Mantel desselben ein Seil gelegt wird, welches horizontal über eine Rolle geleitet ist, und dann lothrecht herab hängt; wie groß muß ein anzuhängendes Gewicht x sein, um den Cylinder in der ersten Minute 210 mal um seine Achse zu drehen?

Das Gewicht des Cylinders ist $= (\frac{7}{4})^2 \pi \cdot 2 \cdot 160$; also die Reibung an der Grundebene des Zapfens, $\mu = \frac{1}{5}$ angenommen

$$\frac{1}{5} \cdot (\tfrac{7}{4})^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 160 = 49 \cdot \pi$$

und dieser Widerstand in den Mantel des Cylinders reducirt

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 49 \cdot \pi}{2} = 8{,}5 \text{ Pfund.}$$

Wenn nun die übrige Reibung, nebst Steifheit des Seils außer Betracht gelassen wird, so hat man die thätige Ueberwucht im Mantel $= x - 8{,}5$; und die eben dahin reducirte Masse

$$= x + \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{7}{4})^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 160$$
$$= x + 1640.$$

Es ist aber, der in den ersten 60 Secunden zurückzulegende Weg dieser Stelle $= 210 \cdot 2 \cdot 2\pi = 2640$ Fuß; folglich nach der Formel

$$h = g' \frac{P}{Q} t^2; \text{ hier}$$

$$2640 = \frac{125}{8} \cdot \frac{x - 8{,}5}{x + 1540} \cdot 60^2$$

und aus dieser Gleichung folgt:

$$x = 84{,}7 \text{ Pfund.}$$

Sechstes Capitel.

Vom Pendel.

§. 202.

Erklärung. Wird ein Faden oder eine Stange an einem festen Punct so aufgehangen, daß Drehung um ihn erfolgen kann, und am andern Ende des Fadens oder der Stange ein Gewicht befestigt, so heißt diese Verbindung ein **Pendel**. Das Pendel heißt **einfach**, wenn der Faden oder die Stange als gewichtlos und der daran befestigte Körper als ein schwerer Punct zu betrachten ist, sonst **zusammengesetzt**.

Erhebt man den Körper doch so, daß seine Entfernung vom Drehpunct, die Länge des Pendels, dieselbe bleibt, und überläßt ihn dann frei der Einwirkung der Schwere, so wird er, alle Hindernisse als beseitigt angesehen, fortdauernd immer zur ersten Höhe steigen, und wieder sinken, und jeder Hingang, so wie jeder Hergang des Gewichts heißt ein Schwung oder Pendelschlag. Die größte Abweichung des Fadens oder der Stange von der Verticallinie heißt der Erhebungswinkel.

§. 203.

Aufgabe. Es bezeichne r die Länge des einfachen Pendels; α den Erhebungswinkel; man soll die Zeit t eines Schwungs bestimmen.

Auflösung. Ist α nicht größer wie etwa 15 Grad, so kann man, wie durch höhere Analysis zu bestimmen ist, mit hinreichender Genauigkeit

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{r} \text{ setzen.}$$

§. 204.

Zusatz. Mit Hülfe des Pendels hat man $g = 15\frac{1}{8}$ Fuße gefunden. Die Länge des einfachen Secundenpendels ist also für unsern Gegenden 3 Fuß 2 Zoll Rheinl.

Zweite Abtheilung.

Die Hydraulik.

Erstes Capitel.

Wassermengen-Bestimmungen.

§. 205.

Aufgabe.

Normal durch einen Querschnitt von a Quadratfußen fließt Wasser mit einer Geschwindigkeit von c Fußen; man soll die in jeder Secunde durchfließende Wassermenge M bestimmen.

Auflösung. Die in jeder Secunde durchfließende Wassermenge erscheint als ein prismatischer Körper, dessen Grundebene = a und dessen Höhe = c; dessen Volumen also a c Cubicfuße groß ist. Man hat daher $M = a\,c$.

§. 206.

Aufgabe. Im horizontalen Boden eines mit Wasser gefüllten, und immer gleich voll erhaltenen Gefäßes, befindet sich eine Oeffnung von a

Quadratfußen. Die unveränderliche Höhe des Waſſerſpiegels über a ſei = h; man ſoll die Geſchwindigkeit c womit das Waſſer ausfließt und die Waſſermenge M in jeder Secunde, beſtimmen.

Auflöſung. In dem erſten Augenblick der Eröffnung des Raums a hat die erſte ausfließende Waſſerſchicht nicht gleich die Geſchwindigkeit c, womit nachher alle folgenden, ſich durch a, bewegen, ſondern ſie wird einen, wenn auch äußerſt kleinen Weg b zurücklegen müſſen, ehe ſie dieſe Geſchwindigkeit c erlangt. Es iſt daher das Gewicht der Maſſe, welcher während Durchlaufung des Wegs b die Geſchwindigkeit c mitgetheilt wird, = abγ (unter γ das Gewicht eines Cubicfußes Waſſer verſtanden) und die Ueberwucht, welche auf dieſe Maſſe wirkt = ahγ, folglich nach der Formel

$$c^2 = 4g\frac{P}{Q}\cdot h \quad \text{§. 175. VI.}$$

hier $c^2 = 4g\frac{ah\gamma}{ab\gamma}\cdot b$; oder

I. $c = 2\sqrt{gh} = 7{,}9\cdot\sqrt{h}$

d. h. die Geſchwindigkeit des Ausfluſſes bei einer Druckhöhe h iſt eben dieſelbe, welche durch den freien Fall von der Höhe h erlangt wird.

Nach der Formel §. 205.

M = ac hat man alſo nun hier:

II. $M = 7{,}9\cdot a\cdot\sqrt{h}$

§. 207.

Zuſatz. Befindet ſich die Oeffnung a nicht im horizontalen Boden, ſondern in einer Seitenwand des Gefäßes, ſo kann man in allen den Fällen wo a nicht ſehr groß iſt, die Formeln I. und II. im vor. §. beibehalten, wenn man h die Entfernung vom Waſſerſpiegel bis zum Schwerpunct von a, (welche Entfernung die Druckhöhe, oder die Geſchwindigkeitshöhe genannt wird) verſteht.

Daß übrigens dieſe Beſtimmungsweiſe von c und M nicht vollkommen richtig, aber doch ſehr annährend iſt, erhellet aus §. 211.

§. 208.

Zuſatz. Da, bei einer Oeffnung a im horizontalen Boden, auch das, dem Waſſerprismen a h y zur Seite ſtehende Waſſer, einen horizontalen Druck auf daſſelbe äußert, und dieſem zufolge ſich mit unter das ausfließende Waſſer drängt, ſo wird die Richtung des ausfließenden Waſſers, von der auf a normalen Richtung abgelenkt, ſo daß nothwendig eine Verminderung der normalen Geſchwindigkeit erfolgen muß, alſo

$c < 7{,}9 \cdot \sqrt{h}$ und folglich auch

$M < 7{,}9 \cdot a \cdot \sqrt{h}$ ſein wird. Eine ähnliche Verminderung findet ebenfalls ſtatt, wenn a ſich in einer Seitenwand befindet. Für den Coefficienten 7,9 muß alſo in der Anwendung ein anderer kleinerer genommen werden, welcher Contractionscoefficient heißt, und durch α ausgedrückt werden ſoll.

Man hat daher

I. $c = \alpha \sqrt{h}$

II. $M = \alpha a \sqrt{h}$.

Die am häufigsten vorkommenden Werthe für α, durch Beobachtungen von Eytelwein bestimmt, enthält folgende Tabelle.

Für Oeffnungen in dünnen Wänden ist $\alpha = 4{,}89$

Für Schutzöffnungen ohne Flügelwände ist $\alpha = 5$.

Für kurze Ansatzröhren ist . . . . $\alpha = 6{,}42$.

Für schmale Gewinne, Schützöffnungen mit Flügelwänden. Steile Einbaue. Gerade Brückenpfeiler ist . . $\alpha = 6{,}76$.

Für beiden Gewinne, Freischleusen mit Flügelwänden. Schräge Einbaue. Spitze Brückenpfeiler ist . . . . $\alpha = 7{,}54$.

Man nennt $2\sqrt{gh}$ oder $7{,}9 \cdot \sqrt{h}$ die Hypothetische; $\alpha \sqrt{h}$ aber die wirkliche Geschwindigkeit.

§. 209.

Erklärung. Bei einem Querschnitt in einer nicht horizontalen Lage fließt das Wasser in den verschiedenen Puncten desselben, auch mit zum Theil verschiedenen Geschwindigkeiten aus, und man versteht unter mittlerer Geschwindigkeit diejenige: bei welcher, wenn sie in allen Puncten des Querschnitts des fließenden Wassers statt fände, eben so viel Wasser in derselben Zeit ausfließen würde als bei den verschiedenen statt findenden Geschwindigkeiten, wirklich ausfließt. Die dieser mittleren Geschwindigkeit

zugehörige Höhe heißt die Druckhöhe oder auch Geschwindigkeitshöhe.

Für solche Fälle wie in §. 207. erwähnt worden, ist also die Entfernung vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunct der Oeffnung, näherungsweise als die der mittleren Geschwindigkeit zugehörige Höhe anzusehen, und sie ergiebt sich nach I. §. 208., nemlich

III. $h = \frac{c^2}{a^2}$.

Die Entfernung vom Wasserspiegel bis zum tiefsten Punct einer Seitenöffnung heißt Wasserstand.

§. 210.

Aufgabe. In der verticalen Seitenwand eines Gefäßes, welches beständig gleich hoch voll Wasser erhalten wird, befindet sich eine rechtwinklichte bis an den Wasserspiegel reichenden Oeffnung, mit horizontalen und verticalen Seiten. Die Breite derselben sei = b Fuße; die Höhe derselben, oder der Wasserstand sei = h Fuße. Man soll die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge M bestimmen.

Auflösung. Es sei ABCD Fig. 60 die Oeffnung; AB = DC = h; AD = BC = b; Man denke sich eine unendliche kleine Linie e, und durch horizontale Linien von oben herab, die ganze Ebene ABCD in eine unendlich große Anzahl = n verschieden hoher Streifen abgetheilt, dargestellt,

daß der erste AGHD die Höhe 2e
der zweite GPQH die Höhe 4e
der dritte die Höhe 6e
u. s. w.

endlich der nte die Höhe $2ne$
erhält; dann iſt

$$2e + 4e + \ldots + 2ne = h \text{ oder}$$

nach der Lehre von den arithmetiſchen Proportionen

$$n(n+1) \cdot e = h.$$

Nun betrachte man im erſten Streifen AGHD, die Mittellinie EF als diejenige in welcher das Waſſer mit der dem Streifen AGHD zugehörigen mittleren Geſchwindigkeit ausfließt, ſo iſt dieſe

$$= \alpha \sqrt{e},$$

der Querſchnitt $= 2e \cdot b$; folglich die durch AGHD fließende Waſſermenge

$$= 2eb \cdot \alpha \sqrt{e}.$$

Eben ſo betrachte man im zweiten Streifen GPQH, die Mittellinie LM als den Ort der mittleren Geſchwindigkeit für das durch GPQH fließende Waſſer, ſo iſt die Geſchwindigkeitshöhe $= 4e$; die mittlere Geſchwindigkeit $= \alpha \cdot \sqrt{4e} = 2\alpha \sqrt{e}$; den Querſchnitt $= 4eb$; alſo die durch GPQH fließende Waſſermenge $= 4eb \cdot 2\alpha \sqrt{e}$. Für den dritten Streifen von der Höhe $6e$ hat man eben ſo:

die Geſchwindigkeitshöhe $= 9e$
die mittlere Geſchwindigkeit $= \alpha \sqrt{9e} = 3\alpha \sqrt{e}$
den Querſchnitt $= 6eb$;
die Waſſermenge $= 6eb \cdot 3\alpha \sqrt{e}$.

u. ſ. w.

Endlich für den nten Streifen von der Höhe $2ne$ die Geſchwindigkeitshöhe $= n^2 \cdot e$.

die mittlere Geſchwindigkeit $= \alpha \sqrt{n^2 e} = \alpha n \sqrt{e}$

den Querſchnitt $= 2neb$; und

die Waſſermenge $= 2neb \cdot \alpha n \sqrt{e}$.

Addirt man alle dieſe Waſſermengen ſo entſteht

$M = 2eb\alpha \cdot \sqrt{e} + 4eb\,2\alpha \sqrt{e} + 6eb\,3\alpha \sqrt{e}$

$+ \ldots + 2neb \cdot n\alpha \sqrt{e}$; oder

$M = 2be\alpha \sqrt{e}\,[1 + 4 + 9 + \ldots + n^2]$

Es iſt aber $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$

$= \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$; alſo

$M = \frac{1}{3} be\alpha \sqrt{e} \cdot n(n+1)(2n+1)$

oder, weil $n(n+1)e = h$ iſt,

$M = \frac{1}{3} \alpha bh (2n+1) \cdot \sqrt{\frac{h}{n(n+1)}}$

Es iſt aber $(2n+1) \cdot \sqrt{\frac{1}{n(n+1)}}$

$= \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{n(n+1)}} = \sqrt{\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}{1+\frac{1}{n}}}$

oder, weil n unendlich groß, alſo $\frac{1}{n} = 0$ folglich

$\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2^2}{1} = 4$ iſt;

$M = \frac{1}{3} \alpha bh \sqrt{h} \cdot \sqrt{4}$; oder

IV. $M = \frac{2}{3} \alpha bh \cdot \sqrt{h}$.

Findet keine Conſtruction ſtatt, ſo hat man

$M = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{g} \cdot bh \cdot \sqrt{h}$,

§. 211.

Zuſatz. Dividirt man die ſo eben beſtimmte Waſſermenge, durch den Querſchnitt b h, ſo entſteht die mittlere Geſchwindigkeit

$$= \tfrac{2}{3} \alpha \sqrt{h} = \alpha \sqrt{\tfrac{4}{9} h};$$

alſo die mittlere Geſchwindigkeitshöhe $= \frac{4}{9} h = \frac{8}{18} h$.

Nach §. 207. wäre ſie näherungsweiſe

$$= \tfrac{1}{2} h = \tfrac{9}{18} h,$$

ſo daß man alſo beim Gebrauch der Annäherung §. 207. auch in dem Fall, wo die Abweichung am bedeutendſten ſein muß, nemlich in dem, wo die Oeffnung bis zum Waſſerſpiegel reicht, um nicht mehr, als um $\frac{1}{18} h$ fehlt, welcher Einfluß, da die Größe unterm Wurzelzeichen ſteht, nur ſehr gering iſt.

§. 212.

Beiſpiel. An einem See befindet ſich ein Ueberfall von 40 Fuß Breite, über welchen das Waſſer 4 Fuß hoch abfließt. Wie viel Cubicfuß M werden in jeder Secunde abfließen; und wie viele Fuß x müßte der Fachbaum niedriger gelegt werden, wenn dieſelbe Waſſermenge, ohne Senkung oder Erhebung des Waſſerſpiegels im See, durch einen nur 30 Fuß breiten Ueberfall abgeführt werden ſollte.

Nimmt man $\alpha = 5$; ſo iſt

$$M = \tfrac{2}{3} \cdot 5 \cdot 40 \cdot 4 \cdot \sqrt{4} = 1066 \tfrac{2}{3}$$

ferner

$$\tfrac{2}{3} \cdot \alpha \cdot 30 \cdot (4 + x) \sqrt{4 + x} = \tfrac{2}{3} \alpha \cdot 40 \cdot 4 \sqrt{4}$$

und hieraus $x = -4 + \sqrt[5]{\left(\frac{32}{3}\right)^2}$

0,84 Fuß = 10 Zoll.

§. 213.

Aufgabe In einer verticalen Seitenwand befindet sich eine rechtwinklichte Oeffnung von der horizontalen Breite b und verticalen Höhe e; der Wasserstand sei = h; alle Abmessungen, wie immer in Fußen verstanden; man soll, vorausgesetzt, daß der Wasserstand unveränderlich erhalten wird, die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge M bestimmen.

Auflösung. Hätte die Oeffnung die Höhe h bis zum Wasserspiegel, so wäre die Wassermenge $= \frac{2}{3} \alpha b h \sqrt{h}$. Durch den verschlossenen Raum von der Höhe $h - e$ wird aber die Wassermenge

$$\frac{2}{3} \alpha b (h - e) \sqrt{h - e}$$

zurückgehalten, und es ist daher die durch b e ausfließende

$$= \frac{2}{3} \alpha b h \sqrt{h} - \frac{2}{3} \alpha b (h - e) \sqrt{h - e}; \text{ oder}$$

V. $M = \frac{2}{3} \alpha b [h \sqrt{h} - (h - e) \sqrt{h - e}]$

§. 214.

Zusatz. Bei der annähernden Ansicht §. 207. wäre für den Fall in §. 213.

VI. $M = \alpha b e \sqrt{h - \frac{e}{2}}$

Ist etwa $\alpha = 5$; $b = 4$; $e = 1$; $h = 5$ so ist nach V.

$M = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 4 [5 \sqrt{5} - 4 \sqrt{4}] = 42{,}40$

und nach VI.

$$M = 5 \,.\, 4 \,.\, 1 \,,\, \sqrt{5 - \tfrac{1}{4}} = 42,42$$

§. 215.

Beispiel. Bei einem Wasserstand von 4 Fuß sollen durch eine Schutzöffnung von 5 Fuß Breite, in jeder Secunde 30 Cubicfuß Wasser abgeführt werden. Wie hoch e muß die Schutzöffnung sein?

Hier ist die Gleichung nach V; $\alpha = 5$ gesetzt;

$$30 = \tfrac{2}{3} \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, [4\sqrt{4} - (4 - e)\sqrt{4 - e}]$$

und aus ihr folgt:

$$e = 4 - \sqrt[3]{25} = 1{,}08 \text{ Fuß.}$$

§. 216.

Aufgabe. Mehrere oben offene prismatische Gefäße communiciren mit einander, wie es Fig. 61. im verticalen Durchschnitt darstellt. Der Wasserspiegel im I. ist unveränderlich; man soll die, nach eingetretenen Beharrungszustand in jeder Secunde abfließende Wassermenge M bestimmen.

Auflösung. Wenn das Wasser I. in unveränderter Höhe erhalten wird, so fließt, wenn II. noch leer ist, im ersten Augenblick das Wasser aus der Communicationsöffnung a, mit derjenigen Geschwindigkeit aus I. in II. welche der Druckhöhe zu a entspricht. Nun vertheilt sich aber das Wasser auf dem Boden von II. und kommt mit einer sehr geringen, auch der Richtung nach veränderten Geschwindigkeit zur Communicationsöffnung a' mit III. Diese Geschwindigkeit wächst aber, so wie sich das Wasser in II. wegen des stärkeren Zu-

fluſſes und geringeren Abfluſſes ſammelt, und dagegen nimmt die Geſchwindigkeit in a ab, weil ein Gegendruck entſteht. Bezeichnen nun c c' die Geſchwindigkeiten des Waſſers in a, a' in den Augenblick, in welchen a c = a' c' oder: in welchen der Beharrungszuſtand eingetreten iſt, ſo bleibt von nun an der Waſſerſpiegel in II. in unveränderlicher Höhe, und man hat alſo, wenn a'', a''' u. ſ. w. c''; c''' u. ſ. w. für die folgenden Oeffnungen die gleiche Bedeutung haben

$$c = \frac{M}{a};\ c' = \frac{M}{a'};\ c'' = \frac{M}{a''} \text{ u. ſ. w.}$$

Bezeichnet nun h die geſammte Druckhöhe vom Waſſerſpiegel in I. bis zum Punct der mittleren Geſchwindigkeit der letzten Oeffnung; x, x' u. ſ. w. die Differenzen der Waſſerſpiegel, ſo entſpricht der hydroſtatiſche Druck gegen a der Höhe x; der gegen a' der x' u. ſ. w. und es iſt alſo nach §. 209. III.

$$x = \frac{c^2}{\alpha^2};\ x' = \left(\frac{c'}{\alpha}\right)^2;\ x'' = \left(\frac{c''}{\alpha}\right)^2 \text{ u. ſ. w.}$$

folglich $x + x' + x''$ u. ſ. w. oder

$$h = \frac{1}{\alpha^2}\left[c^2 + c'^2 + c''^2 + \ldots\right]$$

Subſtituirt man hierinnen die Werthe für c, c' u. ſ. w. ſo entſteht

$$\text{VII. } h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 + \ldots\right]$$

und hieraus auch

$$\text{VIII. } M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 + \ldots}}$$

§. 217.

Aufgabe. Durch ein Gerinne, Canal, Graben oder Fluß fließt das Waſſer bei unveränderlichem Querſchnitt a, auf die Länge l welcher das Gefälle a zugehört, in einerlei Richtung, gleichförmig ab, dergeſtalt, daß der Waſſerſpiegel mit dem Grundbett als parallel anzuſehen iſt. Der ebenfalls auf die Länge l als unveränderlich anzuſehende benetzte Umfang ſei = p; man ſoll die mittlere Geſchwindigkeit c des abfließenden Waſſers und die in jeder Secunde abfließende Waſſermenge M beſtimmen.

Auflöſung. Bezeichnet w den Widerſtand, welcher aus den im bewegten Umfang ſtatt findenden Hinderniſſen gegen die Bewegung, im Mittel auf ein Waſſerelement im Querſchnitt a kommt, ſo wächſt w mit p, den je größer p iſt, deſto mehr Hinderniſſe erzeugen ſich; ferner nimmt w ab, ſo wie a größer wird, denn je größer a iſt, deſto weniger von den ſtattfindenden Hinderniſſen kommen auf ein Element; endlich wächſt w mit c in Hinſicht der Menge der Berührungspuncte von welchen ein Waſſerelement ſich losreißen muß und auch in Hinſicht der Kürze der Zeit, in welcher dieß losreißen erfolgen muß, und es verhält ſich alſo, wenn für ein anderes Profil, unter denſelben Bedingungen, a′; l′, e′, p′, c′, w′ dieſelbe Bedeutung haben

$$w : w' = \left\{\begin{matrix} p : p' \\ a' : a \\ c : c' \\ c : c' \end{matrix}\right\}; \text{ oder}$$

$$w : w' = \frac{pc^2}{a} : \frac{p' \cdot c'^2}{a'}$$

Wenn aber, wie vorausgesetzt ist, das Wasser ohnerachtet es auf einer schiefen Ebene abfließt, sich dennoch gleichförmig bewegt, so muß für jedes Wasserelement, die beschleunigende Kraft, dem Widerstand gleich sein, und es ist also $\frac{e}{l} = w$; $\frac{e'}{l'} = w'$ folglich

$$\frac{e}{l} : \frac{e'}{l'} = \frac{pc^2}{a} : \frac{p' c'^2}{a'}$$

und hieraus

$$c = c' \cdot \sqrt{\frac{l'}{e'} \cdot \frac{p}{a'}} \cdot \sqrt{\frac{e}{l} \cdot \frac{a}{p}}.$$

Beziehen sich alle Abmessungen auf Rheinl. Fuße, so ist nach einem aus Versuchen von du Buat entnommenen Mittelwerth

$$c' \cdot \sqrt{\frac{l'}{e'} \cdot \frac{p'}{a'}} = 90{,}9 \text{ zu setzen:}$$

folglich

IX. $c = 90{,}9 \cdot \sqrt{\frac{e}{l} \cdot \frac{a}{p}}$ und also

X. $M = 90{,}9 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{e}{l} \cdot \frac{a}{p}}$.

§. 218.

Zusatz. Aendert ein Fluß bei einer Anschwellung des Wassers nicht sein Gefälle, wohl aber den Querschnitt

ſchnitt a und benetzten Umfang p; wird nemlich erſteres = A; letzterer = P, ſo ändert ſich auch ſeine Geſchwindigkeit c; ſie ſei dann = C, ſo hat man nach IX.

$$C : c = \sqrt{\frac{A}{P}} : \sqrt{\frac{a}{p}}.$$

Bezeichnet b die mittlere Breite, h die mittlere Tiefe für a und haben B, H dieſelbe Bedeutung in Beziehung auf A, ſo hat man

$$C : c = \sqrt{\frac{BH}{B + 2H}} : \sqrt{\frac{bh}{b + 2h}}$$

und wächſt b nur wenig, ſo daß man $\sqrt{B} : \sqrt{b} = 1$ ſetzen kann, ſo entſteht näherungsweiſe

$$C : c = \sqrt{\frac{H}{B + 2H}} \cdot \sqrt{\frac{h}{b + 2h}}$$

und noch mehr näherungsweiſe, wenn b ſehr groß iſt

$$C : c = \sqrt{H} : \sqrt{h}.$$

§. 219.

Beiſpiel. Es ſoll ein Fluß, welcher bei einer höchſten, beobachteten Anſchwellung 20000 Quadratfuß Querſchnitt und 4000 Fuß benetzten Umfang hat, eingedeicht werden. Wenn nun die Höhe der Deiche zu 30 Fuß beſtimmt iſt; wie weit müſſen dieſelben von einander abſtehen, damit zwiſchen den Deichen, die Waſſermenge abfließen kann, welche bei der beobachteten höchſten Anſchwellung abgeführt wurde?

Die geſuchte Entfernung ſei = x Fuße; die mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers in dem Querſchnitt

von 20000 Quadratfußen werde durch c, die des Waſſers zwiſchen den Deichen, alſo in dem Querſchnitt 30 . x werde durch v ausgedrückt, ſo ergeben ſich die Gleichungen

1) $20000 \cdot c = 30 \cdot x \cdot v$

2) $c : v = \sqrt{\frac{20000}{4000}} : \sqrt{\frac{30x}{x + 2 \cdot 30}}$

und aus ihnen

$$3x : 2000 = \sqrt{5} : \sqrt{\frac{30x}{x + 60}};$$

Aus dieſer Gleichung entſpringt ſehr nahe $x = 300$ Fuß.

§. 220.

Aufgabe. Unter allen rechtwinklichten Profilen bietet dasjenige bei denſelben Flächenraum den geringſten benetzten Umfang dar, bei welchen die Grundbreite doppelt ſo groß wie die Tiefe iſt. Man ſoll ein ſymmetriſch doſſirtes Profil angeben, welches bei derſelben Tiefe h; denſelben Querſchnitt und denſelben benetzten Umfang, alſo mit jenem gleiche Vorzüge, vor andern Profilen hat.

Auflöſung. Die Grundbreite ſei $= x$; die Ausladung $= y$; ſo ergeben ſich die Gleichungen

1) $hx + hy = 2h^2$

2) $x + 2\sqrt{h^2 + y^2} = 4h$

und aus ihnen

$$x = \tfrac{2}{3}h$$
$$y = \tfrac{4}{3}h.$$

§. 221.

Zuſatz. Für ein ſolches Profil wie §. 220. iſt dann $c = 90{,}9 \cdot \sqrt{\frac{e}{l} \cdot \frac{h}{2}}$ und

$$M = 90{,}9 \cdot 2h^2 \cdot \sqrt{\frac{e}{l} \cdot \frac{h}{2}}.$$

Iſt z. B. $M = 200$ Cubicfuß; das Gefälle auf 100 Ruthen $= 4''$; alſo $\frac{e}{l} = \frac{4}{14400}$; und ſoll h beſtimmt werden, ſo hat man

$$200 = 90{,}9 \cdot 2h^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot \frac{h}{2}}$$

und hieraus

$$h = \sqrt[5]{\frac{2 \cdot 2000^2}{30{,}5^2}} = 6{,}1382 \text{ Fuß}$$

alſo: die Grundbreite $= 4{,}0921$ Fuß
die Tiefe $= 6{,}1382$ „
und die Ausladung $= 8{,}1842$ „.

§. 222.

Aufgabe. Für irgend eine mit den Ufern parallele Richtung ſei die Geſchwindigkeit des Waſſers auf der Oberfläche deſſelben $= c$; man ſoll hieraus für die zugehörige Verticale von der Tiefe h, die mittlere Geſchwindigkeit v beſtimmen.

Auflöſung. Erfahrungen zufolge nimmt die Geſchwindigkeit auf jeden Fuß Tiefe um $0{,}008 \cdot c$ ab. Sie iſt alſo unten $= c - 0{,}008\, c \cdot h$; daher die mittlere $= \frac{c + c - 0{,}008\, c \cdot h}{2}$; oder

$$v = (1 - 0{,}004 \cdot h) \cdot c.$$

§. 223.

Zuſatz. Kann man in Profilen, wo die Formeln IX. und X. keine Anwendung finden, an mehreren Stellen der Oberfläche, parallel mit den Ufern gedacht, die Geſchwindigkeit meſſen, ſo läßt ſich daraus mit Hülfe des vor. §. leicht die geſammte Waſſermenge und auch die mittlere Geſchwindigkeit für den ganzen Querſchnitt beſtimmen.

§. 224.

Aufgabe. Bei einer Röhrenleitung von l Fuß Länge, ſei der Durchmeſſer im Lichten = d; die geſammte Druckhöhe = h; man ſoll durch l, d und h die mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers = c und die in jeder Secunde abfließende Waſſermenge M beſtimmen.

Aufgabe. Man ſetze den Theil der Druckhöhe h, welcher auf Erzeugung und Erhaltung der Geſchwindigkeit c verwendet wird = h'; den übrigen Theil, der die Hinderniſſe an den Röhrenwänden zu überwinden hat = h''; ſo hat man die Gleichungen

1) $h' + h'' = h$

2) $c = \alpha \sqrt{h'}$ oder $h' = \frac{c^2}{\alpha^2}$.

Wenn nun bei einer andern Röhrenleitung L, D, C, H', ähnliche Größen bezeichnen, ſo iſt, wie §. 217.

$$H'' : h' = \left\{ \begin{array}{c} D\pi : d\pi \\ \frac{1}{4} d^2\pi : \frac{1}{4} D^2\pi \\ C^2 : c^2 \\ L : l \end{array} \right\}$$

und hieraus

$$h'' = \frac{D\,H''}{L\,C^2} \cdot \frac{c^2 \cdot l}{d}$$

Nach den Verſuchen von du Buat iſt, im Mittel, alle Abmeſſungen in Fußen verſtanden

$$\frac{D\,H'}{L\,C^2} = \frac{1}{2006}; \text{ folglich}$$

$$3)\ h'' = \frac{c^2\,l}{2006 \cdot d}$$

Subſtituirt man nun die Werthe für h' und h'' aus 2 und 3, in 1; ſetzt 6,42 für α; und entwickelt c_2, ſo entſteht

$$IX.\quad c = 6{,}42 \cdot \sqrt{\frac{50\,d\,h}{l + 50\,d}}$$

und, weil $M = c \cdot \frac{1}{4} d^2 \pi$ iſt,

$$XII.\quad M = 3\,d^2 \cdot \sqrt{\frac{50\,d\,h}{l + 50\,d}}.$$

§. 225.

Zuſatz. In den Fällen, wo l groß iſt, kann man 50 d als Summand von l außer Betracht laſſen, und ſetzt man dann noch 7 für $\sqrt{50}$ ſo entſteht, nahe genug:

$$c = 45 \cdot \sqrt{\frac{d\,h}{l}} \text{ und}$$

$$M = 35 \cdot d^2 \cdot \sqrt{\frac{d\,h}{l}}.$$

Iſt z. B. l = 2000; h = 10; M = 2; ſo erhält man

$$d = \sqrt[5]{\frac{400}{35^2}} \text{ beinahe} = 0{,}8 \text{ Fuß}$$

$$= 9\tfrac{1}{2} \text{ Zoll.}$$

§. 226.

Zuſatz. Iſt am Ende einer Röhrenleitung eine horizontale Oeffnung, aus welcher das Waſſer, vermöge der Druckhöhe h lothrecht in die Höhe ſteigt, ſo ergiebt ſich, wenn c die nach §. 224. und 225. zu beſtimmende Geſchwindigkeit in dieſer Oeffnung iſt, die Strahlhöhe $z = \frac{c^2}{4g}$.

Mariotte hat aus ſeinen Verſuchen die den Erfahrungen ſehr entſprechende Gleichung entnommen:

$$h = z + \frac{z^2}{300}$$

woraus ſich z leicht entwickeln läßt.

§. 227.

Erklärung. Ein Ueberfall oder Wehr heißt vollkommen, wenn der Waſſerſpiegel des Unterwaſſers, niedriger liegt, als die Oberfläche der Ueberlaßſchwelle; unvollkommen, wenn er höher liegt.

§. 228.

Aufgabe. In einem Fluß, von B Fuß mittlerer Breite, welcher in jeder Secunde M Cubicfuß Waſſer abführt, wird ein vollkommener Ueberfall von der Breite b und Höhe k angelegt, über welchen das Waſſer mit der Höhe H (Fig. 62.) abfließt. Man ſoll eine Gleichung zwiſchen B, M, b, k, H darſtellen.

Auflöſung. Wäre das Waſſer vor dem Ueberfall als ſtillſtehend anzuſehen, ſo hätte man nach §. 211. die mittlere Geſchwindigkeitshöhe $= \frac{2}{3}$ H; weil aber das Waſſer ſchon mit einer Geſchwindigkeit

$= \frac{M}{B(H+k)}$ ankommt, ſo wird, wenn x die zugehörige Höhe bezeichnet, die Höhe der mittleren Geſchwindigkeit für den Raum b H gleich

$$\frac{4}{5} H + x \text{ oder}$$

$$= \frac{4}{5} H + \frac{M^2}{4\varepsilon B^2 (H+k)^2} \text{ ſein;}$$

und folglich iſt die mittlere Geſchwindigkeit für dieſen Raum b H

$$= \alpha \sqrt{\frac{4}{5} H + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \left[\frac{M}{B(H+k)}\right]^2};$$

und daher

$$M = bH \cdot \alpha \sqrt{\frac{4}{5} H + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \left[\frac{M}{B(H+k)}\right]^2}$$

woraus man erhält

$$\text{XII. } M = \frac{2}{3} \alpha b H \sqrt{H} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{4\varepsilon}\left[\frac{\alpha b H}{B(H+k)}\right]^2}}$$

§. 229.

Zuſatz. Soll aus der Gleichung

$$M = bH\alpha \sqrt{\frac{4}{5} H + \frac{1}{4\varepsilon}\left[\frac{M}{B(H+k)}\right]^2}$$

der Werth für H entwickelt werden, ſo laſſe man zuvörderſt um eine höhere Gleichung zu vermeiden, die der ſchon vorhandenen Geſchwindigkeit zugehörige Höhe x außer Betracht; dann hat man Näherungsweiſe $M = \frac{2}{3} \alpha b H \sqrt{H}$ und hieraus $H = \left(\frac{3M}{2\alpha b}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Nun quadrire man obige Gleichung, und gebe ihr folgende Form:

$$M^2 = \frac{4}{5} a^2 b^2 H^3 + \frac{1}{4g} \left\{ \frac{abM}{B\left(1 + \frac{k}{H}\right)} \right\}^2$$

setze dann in diese, in das ohnehin immer nur kleine zweite Glied für H den Näherungswerth $\left(\frac{3M}{2ab}\right)^{\frac{2}{3}}$, so hat man

$$M^2 = \frac{4}{5} a^2 b^2 H^3 + \frac{1}{4g} \cdot \left\{ \frac{abM}{B\left(1 + k\left(\frac{2ab}{3M}\right)^{\frac{2}{3}}\right)} \right\}^2$$

und hieraus

$$\text{XIV. } H = \sqrt[3]{\frac{2}{5} M^2 \left\{ \frac{1}{a^2 b^2} - \frac{1}{4gB^2 \left[1 + k\left(\frac{2ab}{3M}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2} \right\}}$$

§. 230.

Zusatz. In den meisten Fällen der Anwendung ist es hinreichend, ohne Rücksicht auf die schon vorhandene Geschwindigkeit

$$M = \frac{2}{3} ab H . \sqrt{H}; \text{ also}$$

$$H = \left(\frac{3M}{2ab}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ zu setzen.}$$

Für unvollkommene Ueberfälle ist dieß eben so der Fall, weshalb in den folgenden §. auch keine Rücksicht auf schon vorhandene Geschwindigkeit genommen ist.

§. 231.

Aufgabe. In einem Fluß, dessen mittlere Breite = B und mittlere Tiefe = h ist, wird ein unvollkommener Ueberfall von der Höhe k und der Breite b angelegt, durch welchen der Wasserspiegel der abflie-

fende Waſſermenge M um die Höhe H aufgeſtaut wird. Man ſoll eine Gleichung zwiſchen B, h, k, b, M, H darſtellen. Fig. 63.

Auflöſung. Es iſt die Waſſermenge, welche durch den Querſchnitt b . H fließt, ohne Rückſicht auf die ſchon vorhandene Geſchwindigkeit, $= \frac{2}{3} \alpha b H . \sqrt{H}$ und die, welche durch den Querſchnitt b (h — k) abgeführt wird $= \alpha b (h - k) \sqrt{H}$; folglich

XV. $M = \alpha b [\frac{2}{3} H + h - k] . \sqrt{H}$.

§. 232.

Beiſpiel. In einem Fluß von 40′ mittlerer Breite und 5 Fuß mittlerer Tiefe, der 3″ Gefälle auf 100 Ruthen hat, ſoll durch einen ebenfalls 40′ breiten Ueberfall der Waſſerſpiegel um 3 Fuß erhöht werden. Die Höhe k des Ueberfalls zu beſtimmen:

Die Waſſermenge, welche der Fluß abführt, iſt nach X.

$$= 90{,}9 . 40 . 5 . \sqrt{\frac{3}{14400} . \frac{40 . 5}{40 + 2 . 5}}$$

$$= 625 \text{ Cub. Fuß.}$$

Durch den Querſchnitt 40 . 3, wenn der Ueberfallgerade bis zum urſprünglichen Waſſerſpiegel reichte, würden aber, ohne Rückſicht auf vorhandene Geſchwindigkeit

$$\frac{2}{3} . 6{,}76 . 40 . 3 . \sqrt{3}$$

$= 955$ Cub. Fuß abfließen; der Ueberfall muß alſo vollkommen werden, und ſeine Höhe k ergiebt ſich alſo aus

$$625 = \frac{2}{3} . 6{,}76 . 40 . (8 - k) \sqrt{8 - k}$$

nemlich $k = 6$ Fuß; folglich auch $H = 8 - k = 2$ Fuß.

Zweites Capitel.

Von der Verengung der Querprofile und dem Rückstau.

§. 233.

Aufgabe. In einem Fluß, deſſen mittlere Breite $= B$, mittlere Tiefe $= H$ und mittlere Geſchwindigkeit $= c$ iſt, wird durch einen Einbau die Breite bis auf b reducirt; die hiedurch bewirkte Erhöhung h des Waſſerſpiegels zu beſtimmen.

Auflöſung. Die mittlere Geſchwindigkeit im Profil $b(H + h)$ ſei $= v$, ſo iſt die zugehörige Höhe $= \frac{v^2}{\alpha^2}$ und dieſe muß nothwendig gleich ſein, der Höhe $\frac{c^2}{4\varepsilon}$, welche der ſchon vorhandenen Geſchwindigkeit c angehört, und der erſt entſtandenen h; man hat alſo

$$\frac{v^2}{\alpha^2} = \frac{c^2}{4\varepsilon} + h$$

Nun iſt aber $b(H + h)v = BHc$;

folglich $v = \frac{BHc}{b(H + h)}$, alſo

$$\text{XVI.} \quad \frac{B^2 H^2 c^2}{\alpha^2 b^2 (H + h)^2} = \frac{c^2}{4\varepsilon} + h$$

woraus ſich h durch eine unreine Cubiſche Gleichung ergiebt.

§. 234.

Aufgabe. In einem Fluß, welcher auf die Länge l das Gefälle e hat, wird durch einen Ueberfall der Waſſerſpiegel um H Fuß erhöht, und es iſt auf dieſelbe Länge l verſtanden, das Gefälle des neuen Waſſerſpiegels über den Ueberfall $= n$; man ſoll durch H, l, e und n den Rückſtau R, d. h. die Entfernung vom Ueberfall bis zu der Stelle beſtimmen, wo die Erhöhung des Waſſerſpiegels aufhört bemerkbar zu ſein, wo alſo der neue und alte Waſſerſpiegel zuſammenfallen.

Auflöſung. Beziehen ſich H', l', e', n' und R' eben ſo auf einander wie H, l, e, n und R, ſo wird R mit H wachſen; und abnehmen wenn der Unterſchied der Winkel, welche der alte und neue Waſſerſpiegel mit den Horizont bilden, größer wird, weil dann die Richtungslinie der Waſſerſpiegel ſich der Parallelität mehr nähern. Nun verhalten ſich aber bei ſo kleinen Winkeln, die Winkel wie ihre Sinuſſe und auch wie ihre Tangenten; die Quotienten $\frac{e}{l}$ und $\frac{n}{l}$ drücken aber dieſe Tangenten aus, und man kann alſo ſchließen

$$R : R' = \left\{ \frac{H : H'}{\frac{e' - n'}{l'} : \frac{e - n}{l}} \right\}.$$

Aus dieſer Proportion folgt

$$R = \frac{R' l' . H'}{e' - n'} \cdot \frac{H . l}{e - n}.$$

Nach du Buat's Verſuchen iſt als Mittelwerth

$\frac{R' \cdot I' \cdot H'}{e' - n'} = 1{,}9$; und folglich

XVII. $R = 1{,}9 \cdot \frac{HI}{e-n}$ Fuße.

§. 235.

Zuſatz. Iſt die mittlere Breite des Fluſſes $= b$, ſeine mittlere urſprüngliche Tiefe $= h$, die Waſſermenge, welche er abführet $= M$, ſo hat man nach X.

$$M = 90{,}9 \cdot bh \cdot \sqrt{\frac{e}{l} \cdot \frac{bh}{b + 2h}}$$

und auch

$$M = 90{,}9 \cdot b(h + H) \sqrt{\frac{n}{l} \cdot \frac{b(h + H)}{b + 2(h + H)}}.$$

Aus der erſten Gleichung kann man $\frac{e}{l}$; aus der zweiten $\frac{n}{l}$ beſtimmen, und ſetzt man dann dieſe Werthe in XVII., ſo ergiebt ſich:

$$R = \frac{15700 \cdot H \cdot b^3 h^3 (H + h)^3}{M^2 [(b + 2h)(H + h)^3 - [b + 2(H + h)] h^3]}.$$

In dem Beiſpiel §. 232. findet man $R = 37631$ Fuß, ohngefähr $1\frac{1}{2}$ Meile.

Drittes Capitel.

Von der Zeitbeſtimmung bei Füllung und Leerung prismatiſcher Gefäße.

§. 236.

Aufgabe. In einem prismatiſchen Gefäß vom horizontalen Querſchnitte A in deſſen horizontalen Bo-

den eine Oeffnung von a Quadratfußen iſt, ſteht das Waſſer anfänglich h Fuße über a. Man ſoll die Zeit t beſtimmen, in welcher, wenn kein Zufluß ſtatt findet, die geſammte Waſſermenge Ah aus a abfließen wird.

Auflöſung. Da die Geſchwindigkeiten, womit die auf einander folgenden Schichten ausfließen, der Formel $\alpha \sqrt{h}$ gemäß, ſich wie die Quadratwurzeln aus den Waſſerhöhen verhalten, ſo findet hier die Geſchwindigkeitsabnahme nach demſelben Geſetz ſtatt, wie die Zunahme beim freien Fall. Ganz ähnlich mit dem Geſetz §. 171., würde alſo in derſelben Zeit t doppelt ſo viel Waſſer ausfließen, wenn die Druckhöhe $= h$ bliebe.

Dann wäre aber nach II.

$$2Ah = \alpha a \sqrt{h} \cdot t$$

und hieraus ergiebt ſich die verlangte Zeit, oder

$$\text{XVIII. } t = \frac{2A}{\alpha a} \cdot \sqrt{h}.$$

§. 237.

Zuſatz. Soll die Zeit t' der Senkung des Waſſerſpiegels zur Tiefe x beſtimmt werden, ſo ergiebt ſich leicht durch Subtraction;

$$t' = \frac{2A}{\alpha a}\sqrt{h} - \frac{2A}{\alpha a}\sqrt{h-x};$$

oder

$$\text{XIX. } t' = \frac{2A}{\alpha a}\left(\sqrt{h} - \sqrt{h-x}\right).$$

Befindet ſich z. B. in einem See, deſſen mittlerer horizontaler Querſchnitt $= 300000$ Quadratfuß beträgt, 9 Fuß unterm Waſſerſpiegel eine Oeffnung von

1 Quadratfuß, ſo iſt, $\alpha = 6{,}42$ geſetzt, die Zeit der Senkung bis zu dieſer Oeffnung $= \frac{2 \cdot 300000}{6{,}42 \cdot 1} \cdot \sqrt{9}$; beinahe $=$ 78 Stunden; die Zeit aber, in welcher ſich der Waſſerſpiegel 5 Fuß tief ſenkt

$$= \frac{2 \cdot 300000}{6{,}42 \cdot 1} \cdot (\sqrt{9} - \sqrt{9-5})$$

beinahe $=$ 26 Stunden.

§. 238.

Zuſatz. Wenn die Oeffnung a nicht im horizontalen Boden, ſondern in einer Seitenwand angebracht iſt, ſo kann man die Formeln XVIII. und XIX. näherungsweiſe beibehalten, wenn man unter h die Entfernung vom anfänglichen Waſſerſpiegel bis zum Schwerpunct von a verſteht.

§. 239.

Zuſatz. Iſt ein Gefäß, in welchem der Waſſerſpiegel in unveränderlicher Höhe erhalten wird, durch eine Oeffnung von a Quadratfußen mit einem leeren prismatiſchen Gefäß vom horizontalen Querſchnitt A verbunden, und bezeichnet h die Entfernung vom Schwerpunct p der Oeffnung a bis zum unveränderlichen Waſſerſpiegel, ſo iſt, weil hier die Geſchwindigkeitsabnahme eben ſo wie in §. 236. erfolgt, die Zeit der Füllung des leeren Gefäß von p bis es zur Höhe h ebenfalls $= \frac{2A}{\alpha a} \sqrt{h}$ und die Zeit, während welcher das Waſſer zur Höhe x ſteigt,

$$= \frac{2A}{\alpha a} (\sqrt{h} - \sqrt{h-x},)$$

§. 240.

Beispiel. Die Zeit zu Anfüllung und Leerung einer Schleusenkammer zu bestimmen.

Es enthalte das Schoßthürchen des Oberthors 5 Quadratfuß; sein Schwerpunct sei vom Oberwasserspiegel 6 Fuß entfernt. Der Cubicinhalt des Raums in der Kammer zwischen dem Unterwasserspiegel und der durch den erwähnten Schwerpunct gedachten Horizontalebene sei 24000 Cubicfuß. Der horizontale Querschnitt der Schleusenkammer = 6000 Quadratfuß. Die Differenz der Wasserspiegel des Ober und Unterwassers sei = 9'; der Quadratinhalt des Schoßthürchens im Unterthor sei 5 Quadratfuß. Die Zeit t in welcher sich der Raum von 24000 Cubicfuß füllt, ergiebt sich aus II, durch die Gleichung

$$24000 = t \cdot \alpha \cdot a \cdot \sqrt{h}; \text{ also,}$$

$\alpha = 6$ gesetzt, weil $a = 5$; $h = 6$ ist,

$$t = \frac{24000}{5 \cdot 5 \cdot \sqrt{6}} = 392 \text{ Secunden}$$

Die Zeit t' in welcher sich der übrige Raum der Kammer anfüllt, ist, nach §. 239. Formel XVIII. zu bestimmen. Es ergiebt sich

$$t' = \frac{2A}{\alpha a}\sqrt{h} = \frac{2 \cdot 6000}{5 \cdot 5} \cdot \sqrt{6} = 876 \text{ Sec.}$$

Es ist daher die Zeit der Anfüllung der Schleusenkammer $= t + t' = 1268$ Secunden $= 21$ Minuten und 8 Secunden.

Die Zeit t'' der Ausleerung ergiebt sich nach XVIII

$$= \frac{2A}{\alpha a}\sqrt{h}; \text{ oder}$$

$t' = \frac{e \cdot 6000}{5 \cdot 5} \cdot \sqrt{9} = 1440$ Secunden $= 24$ Minuten.

Viertes Capitel.

Von der Kraft des bewegten Waſſers, dem Stromquadranten, den oberſchlächtigen und unterſchlächtigen Waſſerrädern.

§. 241.

Aufgabe. Eine Waſſermaſſe trifft mit der Geſchwindigkeit c und dem Querſchnitt a, eine ſtillſtehende feſtgehaltene Ebene E normal. Man ſoll die Einwirkung P des Waſſers auf E beſtimmen.

Auflöſung. Bezeichnet M die Anzahl Cubicfuße Waſſer, welche in jeder Secunde ankommen, ſo iſt, für irgend eine Zeit t, das Gewicht der Waſſermaſſe, deren Geſchwindigkeit c durch die, der Einwirkung P gleiche, Gegenwirkung P der Ebene E in dieſer Zeit t, vernichtet wird $= Mt\gamma$; daher nach der Formel

$$c = 2g \frac{P}{Q} t \text{ §. 175. I.}$$

hier $c = 2g \frac{P}{Mt\gamma} t$, und hieraus

$$\text{XX. } P = \frac{c}{2g} M\gamma$$

§. 242.

Zuſatz. Weil $M = ac$ iſt, ſo hat man auch $P = \frac{c^2}{2g} a\gamma$, oder: wenn h die zu c gehörige Höhe ausdrückt, $P = 2ha\gamma$.

§. 243.

Zuſatz. Bewegt ſich E nach derſelben Richtung, wie das Waſſer mit der Geſchwindigkeit v und iſt $c > v$ ſo iſt der Einfluß eben der, als wenn E ſtill ſtände, und das Waſſer mit der Geſchwindigkeit $c - v$ normal auf E, ankäme. Bezeichnet P' die ſo ſtatt findende Einwirkung, ſo hat man alſo

XXI. $P' = \frac{c - v}{2g} M\gamma$

Man nennt P die abſolute, P' die relative Einwirkung.

§. 244.

Zuſatz. Die beiden Formeln XX. und XXI. ſind ſowohl beim Stoß eines iſolirten Waſſerſtrahls als auch, wenn das Waſſer in einem Gerinne eingeſchloſſen iſt, deſſen Querſchnitt von E beinahe ganz angefüllt iſt, ſo daß alſo a und E als gleichgroß zu betrachten ſind, anwendbar. Iſt aber E bedeutend kleiner wie a, wie z. B. bei Schiffmühlenrädern, ſo iſt nach den Verſuchen von Boſſut, d'Alembert, Langsdorf, Condorcet, nur die Hälfte zu nehmen.

Vom Stromquadranten.

§. 245.

Aufgabe. An einem Faden hängt eine Kugel, deren Gewicht unter Waſſer = p iſt; man ſoll aus dem Winkel β, welchen der Faden dann mit der Verticallinie bildet, wenn die Kugel ſich im fließenden Waſſer ganz untertaucht, aber ſehr nahe an der Ober-

fläche) befindet, und ſtille ſteht, die Geſchwindigkeit c deſſelben beſtimmen.

Auflöſung. Bezeichnet r den Halbmeſſer der Kugel, ſo wäre die abſolute Einwirkung des Waſſers auf die von c normal getroffene Projection der Kugel, weil M hier $= r^2\pi \cdot c$ wäre, gleich

$$\frac{c}{2g} r^2 \pi c \cdot \gamma.$$

Bezeichnet nun Q die Einwirkung auf die Oberfläche der Halbkugel, ſo kann man, unter n eine Verſuchszahl verſtanden,

$$Q = n \cdot \frac{c^2}{2g} r^2 \pi \cdot \gamma \text{ ſetzen.}$$

Für eine andere Geſchwindigkeit c', welcher der Winkel β' zugehört, ſei die Einwirkung auf dieſelbe Kugelfläche $= Q'$; ſo hat man, eben ſo

$$Q' = n \cdot \frac{c'^2}{2g} r^2 \pi \cdot \gamma$$

$$\text{alſo } Q : Q' = c^2 : c'^2$$

Nach dem Parallelogramm der Kräfte iſt aber auch

$$Q = p \operatorname{tg} \beta$$

$$Q' = p \cdot \operatorname{tg} \beta' \text{ alſo}$$

$$Q : Q' = \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\beta'; \text{ daher}$$

$$c^2 : c'^2 = \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\beta' \text{ folglich}$$

$$c = \frac{c'}{\sqrt{\operatorname{tg}\beta'}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\beta}$$

iſt nun μ, aus Verſuchen durch ſchwimmende Körper, ein Mittelwerth für $\frac{c'}{\sqrt{\operatorname{tg}\beta'}}$, ſo hat man

$$c = \mu \sqrt{\operatorname{tg}\beta}.$$

Ein einfaches Werkzeug, um β zu messen, ist der Stromquadrant.

Vom oberschlächtigen Wasserrad.

§. 246.

Aufgabe. Das Moment N der Kraft P des Wassers am oberschlächtigen Rad zu bestimmen.

Auflösung. Man stelle sich vor, daß das Wasser, welches in den Zellen durch sein Gewicht wirkt, als ein körperliches Ringstück ABCD Fig. 64. um den Bogen NR der Peripherie des Theilrisses gleichförmig vertheilt wäre. Bezeichnet nun M die Wassermenge welche in jeder Secunde aufs Rad stürzt, v die Geschwindigkeit, womit jeder Punct der Peripherie des Theilrisses sich in derselben bewegt, b die Länge des Bogens NR; a die Länge der zugehörigen Sehne NR; r den Halbmesser EN = ER des Theilrisses; und ist F, in dem horizontalen Halbmesser liegend, der Schwerpunct des wasserhaltenden Bogens oder des körperlichen Ringstücks ABCD, oder auch der centrischen Kreislinie von N bis R, so ist der Querschnitt dieses körperlichen Ringstücks $= \frac{M}{v}$; also das Gewicht des Wassers in denselben $= b \cdot \frac{M}{v} \cdot \gamma$; folglich das statische Moment N dieses Gewichts in Beziehung auf die Achse des Rades $= EF \cdot b \frac{M}{v} \gamma$.

Nach §. 71. ist aber

$$b : a = r : EF;$$

folglich $b \cdot EF = r \cdot a$; alſo

$$N = ra\frac{M}{v}\gamma$$

und folglich die Kraft ſelbſt, in die Peripherie des Theilriſſes reducirt, oder

$$P = a\frac{M}{v}\gamma$$

Erfahrungen zufolge iſt im Mittel $\alpha = \frac{1}{6} \cdot 2r = \frac{1}{3}r$ zu ſetzen, und man hat daher, für den practiſchen Gebrauch

$$\text{XXII. } P = \frac{5rM\gamma}{3v}.$$

§. 247.

Zuſatz. Bezeichnet c die Geſchwindigkeit, womit das aufs Rad ſtürzende Waſſer nach der Richtung NG die Zellen trifft, ſo kommt der im vor. §. beſtimmten Kraft P noch ein Stoß zu Hülfe, wenn die aus c entſpringende tangentiale Geſchwindigkeit größer wie v iſt. Es wird aber, den Erfahrungen zufolge, für zweckmäßig gehalten, die Laſt ſo groß zu wählen, daß beide Geſchwindigkeiten gleich werden, alſo kein Stoß erfolgt, und für dieſe gewöhnlich ſtatt findenden Fälle gilt alſo die Formel XXII.

§. 248.

Zuſatz. In ſo ferne die Wirkung einer Kraft deſto größer iſt, je größer dieſe Kraft, und je größer die Schnelligkeit iſt, womit der angegriffene Punct durch ſie fortbewegt wird, ſo iſt alſo auch beim oberſchlächtigen Rad die Größe des Effects nicht blos von P, ſondern in demſelben Grad von v abhängig, und

es ist folglich das Product Pv oder das mechanische Moment der Kraft, die Verhältnißzahl der Größe des Effects. Nun ist aber aus XXII,

$$Pv = \tfrac{1}{2}\, rM\chi$$

und es bestimmt daher das Product rM als Verhältnißzahl die Größe der Wirkung. Bezeichnen daher E, E′ die Effecte zweier oberschlächtigen Räder, r, r′ ihre Halbmesser, M, M′ die Wassermengen welche auf die Räder in jeder Secunde stürzen, so verhält sich

$$E : E' = rM : r'M'.$$

Vom unterschlächtigen Wasserrad.

§. 249.

Aufgabe. Beim unterschlächtigen Wasserrad im geraden Gerinne, die Größe P der tangentialen Wirkung der Kraft des Wassers aufs Rad, zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet c die Geschwindigkeit, womit das Wasser die Schaufeln normal trifft, v die des Mittelpuncts der getroffenen Schaufelebenen; M die in jeder Secunde ankommende Wassermenge; r den Halbmesser des Rades bis zu den erwähnten Mittelpuncten der Schaufeln verstanden, so hat man, bei enggeschaufelten Rädern, wo die gesammte Wassermenge M zum Stoß gelangt, nach XXI.:

$$P = \frac{c - v}{2g} M\gamma.$$

also das statische Moment dieser Kraft

$$= r \cdot \frac{c - v}{2g} M\gamma$$

und ihr mechaniſches, alſo die Verhältnißzahl der Größe des Effects $= v \cdot \frac{c - v}{2g} M\gamma$.

Anmerk. Bei Schiffmühlenrädern muß man, nach §. 244. im Renner 4g für 2g ſetzen.

§. 250.

Aufgabe. Es bezeichne M die Waſſermenge welche auf ein unterſchlächtiges Waſſerrad in geraden Gerinne wirkt; (immer pro Secunde, und in Cubicfuſſen verſtanden) c die Geſchindigkeit womit das Waſſer die Schaufeln normal trift; man ſoll die Geſchwindigkeit v der Schaufeln der Bedingung gemäß beſtimmen, daß das mechaniſche Moment oder der Effect, ein Maximum wird.

Auflöſung. Man ſetze $v = \frac{1}{2} c \pm x$ ſo iſt das mechaniſche Moment nach dem vorigen §.

$$= (\tfrac{1}{2} c \pm x) \cdot \frac{c - (\frac{1}{2} c \pm x)}{2g} M\gamma$$

oder $= \frac{M\gamma}{2g} \cdot (\frac{1}{4} c^2 - x^2)$

und dieſer Ausdruck wird größtmöglichſt, wenn $x = o$ iſt. Für $x = o$ erhält man aber $v = \frac{1}{2} c$ und es wird alſo der Effect eines unterſchlächtigen Rades im geraden Gerinne ein Maximum wenn man demſelben gerade ſo viel Laſt zu überwältigen giebt, daß die Geſchwindigkeit der Schaufel halb ſo groß wie die des anſchlagenden Waſſers wird.

Für den größtmöglichſten Effect, d. h. für $v = \frac{1}{2} c$ hat man alſo nach §. 249.

XXIII. $P = \frac{c}{4g} M\gamma$.

§. 251.

Beispiel. Es sei M = 60 Cubikfuß; c = 12 Fuß; r = 8 Fuß; der Halbmesser der Welle des Wasserrades = 1 Fuß. An dieser Welle hänge vermittelst eines umgelegten Seils, ein Gewicht von x Pfunden lothrecht herab, dem Bestreben des Wassers, das Rad zu drehen, entgegenwirkend. Wie groß muß man x nehmen, damit der Effect ein Maxim. wird.

Es ist, ohne Rücksicht auf die Nebenhindernisse der Reibung u. s. w., das Widerstandsmoment der Last in Beziehung auf die Achse des Wasserrades = x . 1; und das Moment der Kraft in dem Augenblick, in welchen die vortheilhaftesten Geschwindigkeit des Rades, nemlich $v = \frac{1}{2} c$ hier = 6 eingetreten ist, nach XXIII.

$$8 \cdot \frac{12}{4 \cdot \frac{125}{8}} \cdot 60 \cdot 66 \text{ oder } = 6082{,}56.$$

Man hat also, wenn in diesem Augenblick wo $v = \frac{1}{2} c$ ist, ein Gleichgewicht zwischen Kraft und Last, während der Bewegung eintreten soll;

$$x \cdot 1 = 6082{,}56; \text{ folglich}$$
$$x = 6082{,}56 \text{ Pfund.}$$

Wird diese Last von 6082,56 Pfund angehängt, so behält dann, nachdem der Beharrungszustand eingetreten ist, das Rad bleibend die Geschwindigkeit $v = \frac{1}{2} c = 6$ Fuß, und folglich hat die Last dann bleibend die Geschwindigkeit $= \frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{3}{4}$ Fuß und es ist also das mechanische Moment der Last

$$= \frac{3}{4} \cdot 6082{,}56$$
$$= 4561{,}92.$$

Daß dieser Beharrungszustand wirklich eintreten wird, erhellet aus folgendem: Wenn man die bestimmte Last von 6082,56 Pfund anhängt, und nun die Schütze so hoch aufzieht, daß in jeder Secunde 60 Cubicfuß ausströmen, so ist im ersten Augenblick, wo das Rad noch stille steht, die Einwirkung des Wassers auf dasselbe, nach XX.

$$= \frac{12}{2 \cdot \frac{125}{8}} 60 \cdot 66$$

$$= 1520{,}64 \text{ Pfund}$$

die, auf diesen Kraftpunct reducirte Last ist aber nur

$$= 6082{,}56 \cdot \tfrac{1}{8}$$

$$= 760{,}32 \text{ Pfund.}$$

und folglich wirkt im ersten Augenblick eine Uebermacht

$$= 1520{,}64 - 760{,}32 = 760{,}32 \text{ Pfund}$$

Dieser gemäß beginnt Bewegung, und zwar beschleunigte; ist nun die Geschwindigkeit der Schaufel allmählig angewachsen, etwa bis zu 4 Fuß, so ist in diesen Augenblick, nach XXI.:

$$\text{die Kraft} = \frac{12 - 4}{2 \cdot \frac{125}{8}} \cdot 60 : 66$$

$$= 1013{,}76 \text{ Pfund}$$

und es findet noch eine Uebermacht

$$= 1013{,}76 - 760{,}32 = 253{,}44 \text{ Pfund}$$

statt; welcher gemäß die Bewegung, wenn auch im geringern Grad, beschleunigt bleibt.

Iſt nun die Geſchwindigkeit der Schaufeln bis zu 6 Fuß angewachſen, ſo iſt in dieſen Augenblick die Kraft

$$= \frac{12 - 6}{2 \cdot \frac{125}{8}} \cdot 60 \cdot 66 = 760{,}32 \text{ Pfund}$$

und da die reducirte Laſt eben ſo groß iſt, ſo findet nun keine Ueberwucht mehr ſtatt, und die jetzige Geſchwindigkeit der Schaufel von 6 Fuß bleibt vermöge des Beharrungsvermögens, ſo lange Kraft und Laſt ſich nicht ändern.

§. 252.

Zuſatz. Wollte man eine gröſsere Laſt etwa 10000 Pfund anhängen, ſo würde der Beharrungszuſtand, für die Geſchwindigkeit y der Schaufeln eintreten, für welche

$$\frac{12 - y}{2 \cdot \frac{125}{8}} \cdot 60 \cdot 66 \cdot 8 = 10000 \cdot 1 \text{ iſt}$$

Aus dieſer Gleichung folgt

$$y = 2{,}136$$

die Geſchwindigkeit der Laſt von 10000 Pfund iſt dann

$$= \frac{1}{8} \cdot 2{,}136 = 0{,}267$$

und folglich ihr mechaniſches Moment

$$= 0{,}267 \cdot 10000 = 2670$$

alſo um 1891,92 kleiner, als für die vortheilhafteſte Laſt.

Wollte man eine kleinere Laſt, etwa nur 4000 Pf. anhängen, ſo würde der Beharrungszuſtand für die

Geſchwindigkeit z der Schaufeln eintreten, für welche

$$\frac{12 - z}{z \cdot \frac{125}{8}} \cdot 60 \cdot 66 \cdot 8 = 1000 \cdot z \text{ iſt.}$$

Aus dieſer Gleichung folgt:

$$z = 8{,}0611 \text{ Fuß,}$$

und die Geſchwindigkeit der 4000 Pfund Laſt wäre dann $= \frac{1}{8} \cdot 8{,}0611 = 1{,}0063$ Fuß, alſo ihr mechaniſches Moment $= 1{,}0063 \cdot 4000 = 4027{,}2$ alſo um $4561{,}92 - 4027{,}2$ oder um $534{,}72$ kleiner, als für die vortheilhafteſte Laſt von 6082,56 Pfund.

Die größtmöglichſte Laſt w, mit welcher der abſolute Stoß Gleichgewicht erhalten würde, ergiebt ſich aus der Gleichung

$$\frac{12}{2 \cdot \frac{125}{8}} \cdot 60 \cdot 66 \cdot 8 = w \cdot 1 \text{ nemlich}$$

$$w = 12165{,}12 \text{ Pfund}$$

Wollte man aber dieſe anhängen, ſo würde keine Bewegung erfolgen.

§. 253.

Aufgabe. Beim unterſchlächtigen Rad im Kropfgerinne, die tangentiale Kraft P des Waſſers aufs Rad zu beſtimmen, bei der Vorausſetzung, daß das Waſſer normal auf die Schaufeln anſchlage.

Auflöſung. Bezeichnet c die normale Geſchwindigkeit des anſchlagenden Waſſers, v die der Schaufeln; d die Höhe des Kropfs, M die in jeder

Secunde ankommende Wassermenge, so ist die Einwirkung des bewegten Wassers, ganz wie im §. 249.

$$= \frac{c - v}{2g} M\gamma$$

und die aus dem Gewicht des zwischen den Schaufeln befindlichen Wassers entspringende Kraft, nach §. 246.

$$= d \frac{M}{v} \gamma; \text{ folglich}$$

$$P = \left(\frac{c - v}{2g} + \frac{d}{v}\right) M\gamma.$$

daher, für den größten Effect, d. h. für $v = \frac{1}{2} c$;

$$\text{XXIV.} \quad P = \left[\frac{c}{4g} + \frac{2d}{c}\right] M\gamma.$$

§. 254.

Aufgabe. Man hat ein nutzbares Gefälle $= h$ für ein unterschlächtiges Wasserrad, und soll bestimmen, ob es für den vortheilhaftesten Effect besser ist, das ganze h für ein horizontales Gerinne, oder den Theil d desselben, zu Anlage eines Kropfes zu benutzen.

Auflösung. Für ein horizontales Gerinne ist der vortheilhafteste Effect nach XXIII.

$$= \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{4g} M\gamma$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{4g} M\gamma = \frac{1}{2} h M\gamma$$

Für ein Kropfgerinne ist derselbe nach XXIV.

$$= \frac{c}{2} \cdot \left[\frac{c}{4g} + \frac{2d}{c}\right] M\gamma$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{4g} + d\right] M\gamma$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot (h - d) + d\right] M\gamma$$

$$= \frac{1}{2} (h + d) M\gamma$$

ſo daß alſo die Anlage eines Kropfes bei der Vorausſetzung, daß das Waſſer die Schaufeln normal trift, vortheilhafter iſt.

§. 255.

Aufgabe. In einem horizontalen Gerinne ſollen n unterſchlächtige Räder hintereinander angelegt, und die Geſchwindigkeit v des erſteren ſo beſtimmt werden, daß bei beiden Rädern gleiche mechaniſche Momente ſtatt finden, mit der Bedingung, daß das zweite ſeine vortheilhafteſte Geſchwindigkeit, nemlich $\frac{1}{2}$ v erhalten ſoll.

Auflöſung. Bezeichnet c die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer das erſte Rad trift, M die Waſſermenge pro Sec., ſo iſt das mechaniſche Moment der Kraft für's erſte Rad $= \frac{c - v}{2g} M\gamma \cdot v$; und für's zweite $= \frac{v - \frac{1}{2}v}{2g} M\gamma \cdot \frac{v}{2}$.

Die Gleichſetzung beider Ausdrücke giebt $v = \frac{4}{5} c$.

§. 256.

Zuſatz. Bei derſelben Aufgabe für 3 hintereinander liegende Räder, erhält man die Geſchwindigkeit des erſten $= \frac{25}{31} c$., die des zweiten $= \frac{20}{31} c$, und die des dritten $= \frac{10}{31} c$.

§. 257.

Aufgabe. Man hat ein Gefälle von h Fußen, und will dieſes zu einem geneigten Gerinne dergeſtalt benutzen, daß in denſelben, n hintereinander liegende Räder, jedes mit derſelben Geſchwindigkeit z vom

Waſſer getroffen werde, und jedem ſeine vortheilhafteſte Geſchwindigkeit $\frac{1}{2}z$ gegeben werden kann. Wie muß h vertheilt werden?

Auflöſung. Das Gefälle fürs erſte Rad ſei $= x$; weil nun, wie man leicht einſieht, alle folgenden Räder einen gleichen Zuwachs y an Gefälle haben müſſen, ſo hat man

$$1)\quad x + (n-1)\,.\,y = h.$$

Nun iſt in Beziehung aufs erſte Rad

$$z = a\sqrt{x};\ \text{alſo}$$

$$\tfrac{1}{2}z = \tfrac{1}{2}a\sqrt{x};\ \text{folglich}$$

in Beziehung auf jedes der übrigen $n-1$ Räder, nach §. 178. X.

$$z = \sqrt{(\tfrac{1}{2}z)^2 + 4gy}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2x + 4gy}$$

daher

$$2)\quad a\sqrt{x} = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2x + 4gy}$$

und aus beiden Gleichungen erhält man

$$y = \frac{3a^2}{16g + 3(n-1)a^2}\,.\,h$$

$$x = \frac{16g}{16.g + 3(n-1)a^2}\,.\,h.$$

Fünftes Capitel.

Vom Heber und den Pumpen.

§. 258.

Angestellten Untersuchungen zufolge ist das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft, nahe an der Erdoberfläche, im Mittel $= \frac{1}{800}$, so daß also ein Cubicfuß Luft $\frac{66}{800}$ beinahe $\frac{1}{12}$ Pfund wiegt.

Eine 32 Fuß hohe Wassersäule oder eine 28 Zoll hohe Queckſilbersäule steht am Meer, den Beobachtungen zu Folge mit dem Druck der atmosphärischen Luft, im Mittel genommen, im Gleichgewicht. Man kann also den Normaldruck der Luft auf irgend eine Ebene auf der Erdoberfläche, dem Gewicht eines Wasserprismens gleich setzen, welches diese Ebene zur Grundebene und 32 Fuß zur Höhe hat.

Vom Heber.

§. 259.

Aufgabe. Die gebogene Röhre, oder der Heber ABC Fig. 65. sei voll Wasser. Der lothrechte Abstand DE des unveränderlichen Wasserspiegels im Gefäß N von der Ausflußöffnung C des Hebers sei $= h$; der Querschnitt des Hebers im Lichten $= a$. Wenn nun der Heber mit seiner Einmündung bei A sich unter Wasser befindet, und die lothrechte Höhe BD weniger wie 32 Fuß beträgt, so soll bestimmt werden

1) ob das Waſſer aus N vermittelſt des Hebers, bei C, ausfließen wird

2) mit welcher Geſchwindigkeit c es ſich in den Heber fortbewegt

3) wie viel Waſſer M pro Secunde aus C abfließen wird.

Auflöſung. Die Druckhöhe welche das Waſſer nach der Richtung AB in den Heber treibt, iſt nach §. 258. = 32 — BD; der Gegendruck aber, nach der Richtung CB = 32 — BE; folglich der Ueberſchuß nach der Richtung AB = 32 — BD — (32 — BE) = BE — BD = h daher nach I, ohne Rückſicht auf die Hinderniſſe an den Wänden des Hebers,

$$c = \alpha \sqrt{h}$$

und

$$M = \alpha . a \sqrt{h}.$$

Von den Saugpumpen.

§. 260.

Aufgabe. Die Kraft P beiläufig zu beſtimmen, welche nach eingetretenem Beharrungszuſtand, erforderlich iſt, den Kolben einer Saugpumpe lothrecht zu erheben.

Auflöſung. Es bezeichne A den Querſchnitt, D den Durchmeſſer des Stiefels; H die Förderungshöhe, d. h. die Entfernung vom Ausguß bis zum unteren Waſſerſpiegel B; in E Fig. 66. ſei der tiefſte, in F der höchſte Stand des Kolben; in E ſei ein mittle-

rer Stand, ſo iſt für dieſen, die Druckhöhe von oben lothrecht herab, auf den Kolben = 32 + KE; und der Gegendruck von unten lothrecht herauf, auf denſelben = 32 — EB; daher der Ueberſchuß von oben herab = 32 + KE — (32 — EB) = KE + EB = H; und es müßte alſo, blos hydroſtatiſch betrachtet

$$P' = H A \gamma \text{ ſein.}$$

Unter den übrigen, der Erhebung des Kolben widerſtrebenden Hinderniſſen, iſt das bedeutendſte, die Reibung des Stiefels im Kolben, und man kann dieſes, den Erfahrungen gemäß, im Mittel dem Gewicht einer Waſſerſäule gleich ſetzen, deren Höhe

$$= \frac{H}{10.D} \text{ iſt.}$$

Hiernach wäre alſo für einfache Fälle der Anwendung genügend

$$P' = \left(H + \frac{H}{10.D}\right) A \gamma.$$

Anmerk. Es muß FB kleiner wie 32 Fuß ſein, denn ſonſt würde durch den Druck der äußeren Luft, das Waſſer dem Kolben nicht mehr folgen.

§. 261.

Aufgabe. Die Kraft P' beiläufig zu beſtimmen, welche erforderlich iſt, den Kolben einer Saugpumpe lothrecht nieder zu drücken.

Auflöſung. Beim Niedergang des Kolben iſt das vorzüglichſte Hinderniß, die Reibung zwiſchen Stiefel und Kolben, folglich wenn man dieſe eben ſo groß annimmt, wie im vor. §.

$$P'' = \frac{H}{10D} \cdot A \gamma.$$

§. 262.

§. 262.

Zuſatz. Um einen gleichförmigen Gang zu erzeugen, ordnet man die Pumpen paarweis an, ſo daß der eine Kolben immer nieder geht, wenn der andere in die Höhe gezogen wird. Für ein Paar iſt dann die Kraft fürs Gleichgewicht

$$= P' + P'' = \frac{5D + 1}{5D} AH\gamma.$$

Bezeichnet daher P die Kraft, welche für n Paare erforderlich iſt, ſo hat man näherungsweiſe:

$$\text{XXV.} \quad P = n \frac{5D + 1}{5D} AH\gamma.$$

§. 263.

Aufgabe. Es bezeichne w die Geſchwindigkeit der Kolben; A den Querſchnitt derſelben, man ſoll die Waſſermenge M beſtimmen welche durch n Paar Pumpen in jeder Minute gehoben wird.

Auflöſung. Jeder Kolben fördert, während er in die Höhe geht, in jeder Secunde die Waſſermenge Aw; alſo in jeder Minute 60 Aw wenn er fortwährend in die Höhe ginge. Da aber bei einem gleichförmigen Gang der Bewegung eben ſo viel Zeit beim Niedergang als beim Aufgang verfließt, ſo fördert jeder in der Minute nur 30 Aw; alſo jedes Paar 60 Aw; folglich n Paare die Waſſermenge n . 60 . Aw. Es geht aber immer ein Theil Waſſer zurück, da ein vollkommen dichtes Anſchließen des Kolben im Stiefel für jede Stelle des

Kolben nicht wohl zu erreichen ist. Rechnet man daher im Mittel $\frac{1}{10}$ Hubverlust, so erhält man

XXVI. $M = 64 . n A w.$

Anmerk. Nach Eytelwein sind $\frac{1}{2}$ Fuß und $2\frac{1}{2}$ Fuß die Gränzen des Werthes für w.

§. 264.

Beispiel. Bei einem Grundbau ist der Zudrang des Wassers in jeder Minute 80 Cubicfuß groß. Man soll durch Pferde, vermittelst eines Pferdegöpels ein Saugpumpenwerk betrieben, wodurch diese 80 Cubicfuß in jeder Minute, 16 Fuß hoch gefördert werden.

Hier ist nach XXVI.

$$80 = 64 . n A w,$$

und dieser unbestimmten Gleichung muß Genüge geschehen, und zugleich darauf Rücksicht genommen werden, daß w zwischen $\frac{1}{2}$ und $2\frac{1}{2}$ Fuß falle, n eine ganze Zahl werden, und A einem Durchmesser D entspreche, der gewisse Gränzen, etwa 5 bis 10 Zoll, nicht überschreite. Durch einige Proben findet man folgende Werthe passend:

$D = 7'$; also $A = \frac{1}{4} . (\frac{7}{12})^2 \pi = 0{,}267 \ldots$ Qf.

$n = 4$; $w = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$ Fuß.

und es ist also der Widerstand der Pumpen, nach XXV.

$$= 4 . \frac{5 . \frac{7}{12} + 1}{5 . \frac{7}{12}} . 0{,}267 . 16 . 66$$

$= 1514$ Pfunde.

Rechnet man nun die Kraft eines Pferdes, den Erfahrungen zufolge, dann zu 200 Pfund, wenn es mit

4 Fuß Geſchwindigkeit wirkt, und bezeichnet die Anzahl der erforderlichen Pferde durch x, ſo iſt ohne Berückſichtigung der Reibung, nach dem Carteſiſchen Grundſatz §. 68. 200 . x : 1614 = $\frac{7}{2}$: 4 und hiernach fällt x zwiſchen 2 und 3, ſo daß alſo 3 Pferde vorgelegt werden müßten.

Die Anordnung der Maſchine ſelbſt kann nun auf gar mancherlei Weiſe erfolgen, und man hat bei ihrer Beſtimmung blos darauf Rückſicht zu nehmen, daß aus 4 Fuß Geſchwindigkeit des Angriffspuncts der Kraft, für den Kolben eine Geſchwindigkeit von $\frac{7}{2}$ Fuß entſpringe.

Bringt man etwa an der ſtehenden Welle, an welcher an Hebeln von R Fuß Länge die Pferde wirken, ein Stirnrad vom Halbmeſſer a an, läßt dieſes in ein Getriebe vom Halbmeſſer b in einer verticalen Welle eingreifen, und durch einen an dieſer Welle angebrachten Krumzapfen vom Halbmeſſer r eine Stange in Bewegung ſetzen, welche vermittelſt eines Hebelsarms von der Länge f eine horizontale Welle hin und her bewegt, an welcher, an Hebelsarmen von k Fußen die Kolbenſtangen hängen, ſo muß, wenn c die Geſchwindigkeit der Peripherien vom Stirnrad und Getriebe, v die der Stange ausdrückt, folgenden Proportionen Genüge geſchehen:

$$4 : c = R : a$$
$$c : w = b\pi : 2r$$
$$w : \tfrac{7}{2} = f : k$$

Aus ihnen entspringt durch Multiplication

$$20 : 7 = \pi b f R : 2 a r k$$

und dieser Gleichung entsprechend sind die Werthe für b, f, R, a, r, k, fest zu setzen.

Man kann, ihr zufolge

$$R = 16 \text{ Fuß}; \; r = 16 \text{ Zoll}$$

$f = k$ und $b : a = 5 : 33$ annehmen.

Anmerk. Daß ein Beharrungszustand erfolgen, und wenn er eingetreten ist, die bei der Berechnung festgesetzte Geschwindigkeit, wenn auch nicht mathematisch scharf, doch ohngefähr statt finden muß, also auch die zubringende Wassermasse von 80 Cubicfuß in Durchschnitt in jeder Minute gehoben werden wird, erhellet wie in §. 251. daraus, daß im ersten Augenblick des Wirkens der Pferde die Maschine noch stille steht, also die absolute Kraft derselben wirkt, folglich eine Ueberwucht, also auch eine beschleunigte Bewegung statt findet, welche aber nur bis zu dem Augenblick beschleunigt sein kann, wo ein Gleichgewicht zwischen Kraft und Last, während der Bewegung eintritt.

Von den Druckpumpen.

§. 265.

Aufgabe. Die Kraft P' zu bestimmen, welche nach eingetretenen Beharrungszustand, beiläufig erforderlich ist, den Kolben einer Druckpumpe lothrecht nieder zu drücken.

Auflösung. Es bezeichne D den Durchmesser, A den Querschnitt des Stiefels; H die Förderungshöhe Fig. 67. so ist für den nachtheiligsten Augenblick d. h. für den, wo der Kolben seinen tiefsten Stand erreicht hat, die entgegenwirkende hydrostatische Druck-

höhe = H; und rechnet man hiezu wie in §. 260. für die Reibung nach $\frac{H}{10D}$, so hat man

$$P' = \left(H + \frac{H}{10D}\right) A \gamma.$$

§. 266.

Aufgabe. Die Kraft P'' zu bestimmen, welche erforderlich, ist, den Kolben zu erheben.

Auflösung. Bezeichnet b den Kolbenhub, so ist für den nachtheiligsten Augenblick, d. h. für den, wo der Kolben seinen höchsten Stand erreicht hat, die Druckhöhe auf ihn = 32; die zu Hülfe kommende Druckhöhe = 32 — b; also der Ueberschuß oder die hydrostatische Widerstandshöhe = b; hiezu die der Reibung wie §. 265. mit $\frac{b}{10D}$ in Rechnung gebracht giebt, $P'' = \left(b + \frac{b}{10D}\right) A \gamma$

§. 267.

Zusatz. Für ein Paar Pumpen (wie §. 262. verstanden) ist also die Kraft = P' + P'' oder

$$= \frac{10D + 1}{10D} A (H + b) \gamma,$$

und bezeichnet also P die erforderliche Kraft für n Paare so hat man

XXVII. $P = n \cdot \frac{10D + 1}{10D} A (H + b) \gamma.$

§. 268.

Aufgabe. Es bezeichne w die Geschwindigkeit der Kolben; A den Querschnitt derselben; man soll die Wassermenge M bestimmen, welche durch n Paar Pumpen in jeder Minute gefördert wird.

Auflösung. Ganz wie in §. 263. erhält man

$$M = 54\, n\, A\, w.$$

§. 269.

Beispiel. Durch ein unterschlächtiges Wasserrad auf dessen Schaufeln in geraden Gerinne in jeder Secunde 40 Cubikfuß Wasser mit 10 Fuß Geschwindigkeit anschlagen, soll ein Druckwerk betrieben und durch dasselbe bei 3 Fuß Hub, das Wasser 97 Fuß hoch gehoben werden; wie viel Paare (n) Pumpen sind erforderlich? welchen Durchmesser D müssen sie erhalten, wie groß muß die Geschwindigkeit w der Kolben werden, und welche Wassermenge M kann in jeder Minute gefördert werden?

Hier ist, nach XXIII., die Kraft für den vortheilhaftesten Effect, also für 5 Fuß Geschwindigkeit der Schaufeln

$$= \frac{10}{4 \cdot \frac{125}{8}} \cdot 40 \cdot \gamma$$

$$= \frac{32}{25} \cdot \gamma$$

die Last aber nach XXVII.

$$= n \cdot \frac{10D + 1}{10D} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \pi \cdot 100 \cdot \gamma$$

$$= \frac{5\pi}{2} \cdot n D (10D + 1) \cdot \gamma$$

Folglich ohne Rückſicht auf Reibung,

$$\frac{3a}{5} : \frac{5\pi}{2} \, nD \, (10D + 1) = w : 6$$

und hieraus

$$nDw \, (10D + 1) = \frac{64}{5\pi}$$

Dieſer Gleichung zufolge ſind die Werthe für n, D, w, zu beſtimmen.

Es genügen, ziemlich genau

$$n = 2; \; w = 1; \; D = 6 \text{ Zoll}$$

und dann iſt $M = 54 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{12})^2 \pi \cdot 1$ beinahe $= 15$ Cubicfuß.

Die Anordnung kann wie in §. 264. beſtimmt werden, nur muß man bei Beſtimmung der Abmeſſungen der Maſchine auch den feſtgeſetzten Hub von 3 Fuß berückſichtigen.

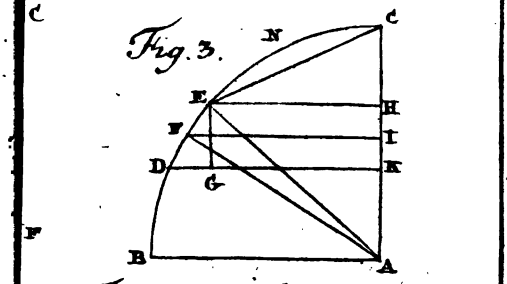


Fig. 3.

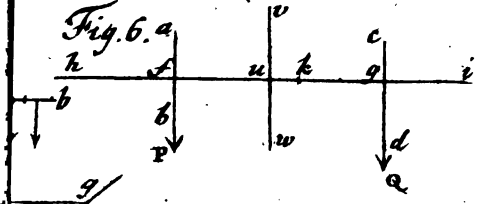


Fig. 6. a

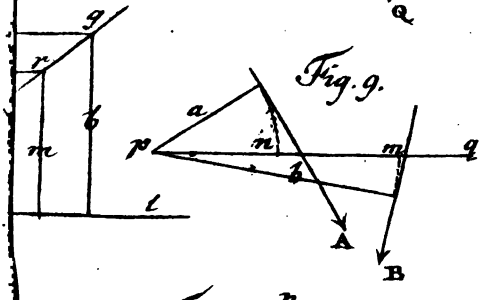


Fig. 9.

SEP 1 - 1954